

## Оптимальное непрерывное управление зависанием космического аппарата

### Optimal continuous control of hovering spacecraft

Гончаревский /Goncharevsky V.

Вилен Степанович

(vilenstepan@yandex.ru)

доктор технических наук, профессор,

заслуженный деятель науки и техники РФ.

ФГБВОУ ВО «Военно-космическая

академия им. А. Ф. Можайского»

МО РФ, почетный профессор.

г. Санкт-Петербург

**Ключевые слова:** групповой полет – group flight; зависание – hovering; относительное движение – relative motion; программа управления – control program.

Рассматривается метод энергетически оптимального непрерывного управления зависанием активного космического аппарата относительно пассивного аппарата, строительные оси которого занимают неизменное положение относительно местной вертикали. В результате решения общей вариационной задачи Лагранжа найдены оптимальные и квазиоптимальные управляющие воздействия, необходимые для осуществления зависания активного аппарата в заданной точке. Определены зависимости энергетических затрат и размеров зоны барражирования при выполнении зависания от величины периода барражирования относительно этой точки.

The method of energetically optimal continuous control of the hovering of an active spacecraft relative to a passive spacecraft, the construction axes of which occupy an unchanged position relative to the local vertical, is considered. As a result of solving the general Lagrange variational problem, optimal and quasi-optimal control actions necessary for the active device to hover at a given point are found. The dependences of energy costs and the size of the barrage zone are determined when depending on the value of the barrage period relative to this point.

Зависание одного космического аппарата (КА) относительно другого является одной из разновидностей группового полета (ГП) [1–14]. Под ГП понимается такое управляемое относительное движение (ОД) двух или более КА, в процессе которого относительное расстояние между ними либо не изменя-

ется, либо изменяется по определенному закону в некоторых достаточно ограниченных пределах, и, кроме того, это расстояние остается значительно меньшим их расстояний до центра планеты. Отсюда следует, что основная цель управления ГП состоит в том, чтобы в процессе его осуществления вектор  $\vec{q}(\tau)$  относительного состояния центров масс КА либо сохранял свое заданное начальное значение  $\vec{q} = \vec{q}_0$ , либо изменялся вполне определенным образом в пределах  $\vec{q}_{\min} \leq \vec{q} \leq \vec{q}_{\max}$ . Вектор  $\vec{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \vec{R}(\tau) \\ \vec{V}(\tau) \end{bmatrix}$ , определяемый

тремя компонентами вектора относительного положения  $\vec{R}(\tau)$  и тремя компонентами вектора относительной скорости  $\vec{V}(\tau)$ , полностью описывает в любой момент времени  $\tau$  относительное положение и относительные скорости КА, участвующих в ГП. Будем полагать, что в его процессе аппарат, относительного которого нужно осуществить зависание, не изменяет траекторию центра масс, а управляемыми являются другие аппараты, участвующие в данной операции. Поэтому в дальнейшем первый из них называется пассивным аппаратом (ПА), а остальные – активными аппаратами (АА).

Отличительной чертой зависания как разновидности ГП является выполнение условия  $\dot{\vec{q}} = \vec{0}$  в течение всего периода времени  $T = \tau_k - \tau_0$ , где  $\tau_0$  и  $\tau_k$  – моменты начала и окончания ГП, причем  $\vec{R} = \vec{R}_0$ , а  $\vec{V} = \vec{0}$ . Таким образом, при осуществлении данной разновидности ГП обеспечивается неизменность относительного положения аппаратов, то есть АА как бы зависает относительно ПА в некоторой точке, отстоящей от ПА на расстоянии  $R_0$  и имеющей постоянные угловые координаты  $\alpha_0, \beta_0$ . Необходимость такого положения может возникнуть при решении задач опознавания космических объектов, осуществления стыковки с

орбитальными станциями, оборудованными несколькими стыковочными узлами, спасения экипажей пилотируемых КА в аварийных ситуациях и т. д.

Исследование динамики движения КА при осуществлении зависания целесообразно проводить в относительной системе координат (ОСК), по осям которой осуществляется ориентация строительных осей ПА. Наиболее часто в качестве такой системы используется орбитальная ОСК, направление осей которой связано с направлением местной вертикали. Дифференциальные уравнения, описывающие динамику движения КА в этой ОСК, могут быть записаны в векторно-матричной форме в виде [2–7]:

$$d\vec{R}/dt = \vec{V}, \quad d\vec{V}/dt = A\vec{R} + B\vec{V} + \vec{U}, \quad (1)$$

где  $\vec{U} = \vec{P}/m$  – управляющее ускорение,  $\vec{P}$  – управляющее воздействие,  $m$  – масса АА,  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ,  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  – квадратные матрицы третьего порядка, вид которых определяется типом орбиты ПА.

Для осуществления зависания АА в заданной точке фазового пространства координат  $\vec{R}_0$  необходимо обеспечить с помощью управляющих воздействий краевые условия  $\vec{R}(\tau) = \vec{R}_0$ ,  $\vec{V}(\tau) = 0$ . Подставив эти условия в уравнения (1), получим вектор-функцию управления, обеспечивающую решение поставленной задачи:

$$\vec{U} = -A\vec{R}_0. \quad (2)$$

Энергетические затраты (ЭЗ) на реализацию управления (2) будут определяться соотношением

$$V_p = \int_0^T |\vec{U}| dt \quad (3)$$

или соотношением

$$J = \int_0^T U_i^2 dt. \quad (4)$$

В случае, когда орбита ПА, с которым связано начало ОСК, близка к круговой, а в качестве независимой переменной выбрано безразмерное время  $\tau = \omega_n t$ , где  $\omega_n$  – угловая скорость обращения ПА вокруг центра планеты, а  $t$  – реальное время, элементы матрицы  $A$  в наклонной орбитальной ОСК  $xyz$  являются постоянными [8]:  $a_{11} = 3\sin^2\beta_0 \cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0$ ,  $a_{21} = 3\cos\alpha_0 \sin\beta_0 \cos\beta_0$ ,  $a_{31} = \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3\sin^2\beta_0)$ .

Следовательно, составляющие вектор-функции управления (2) будут также постоянными величинами  $u_x = R_0(3\sin^2\beta_0 \cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0)$ ,  $u_y = 3R_0 \cos\alpha_0 \sin\beta_0 \cos\beta_0$ ,  $u_z = R_0 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3\sin^2\beta_0)$ , зависящими от дальности  $R_0$  и угловых координат точки зависания  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ , а ЭЗ, кроме того, еще являются функциями времени зависания  $T$ .

Таким образом, для обеспечения зависания АА строго в заданной точке с координатами  $\vec{R}_0$  в состав двигательной установки (ДУ) управления движением

центра масс АА должны входить, если пренебречь изменением массы АА в процессе маневра, двигатели постоянной тяги, работающие в непрерывном режиме. Такой режим, а также связанные с ним повышенные ЭЗ являются недостатком рассмотренного метода управления зависанием. Однако на практике во многих случаях нет необходимости жестко фиксировать положение АА в заданной точке зависания. Исследования показывают, что если ослабить эти ограничения, то есть допустить некоторую свободу перемещения АА относительно данной точки, то это позволит снизить требуемые ЭЗ. При таком управлении необходимо удерживать АА в некоторой зоне относительно точки зависания, размеры которой ограничены и имеют достаточно малую величину. Реализовать это можно, если использовать для управления зависанием такую разновидность ГП, как барражирование относительно заданной опорной точки. Характерной ее особенностью является то, что АА периодически через время  $T$ , называемое периодом барражирования, должен возвращаться в заданную опорную точку фазового пространства состояний, характеризуемую значением вектора  $\vec{q}_0$ . При небольших отклонениях АА такая разновидность барражирования может рассматриваться как разновидность зависания около данной опорной точки.

Для отыскания оптимальных непрерывных программ управления компланарным барражированием относительно заданной опорной точки можно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 \tau + C_3 \tau^2 + C_4 \tau^3 + (C_5 + C_6 \tau) \sin \tau + \\ &\quad + (C_7 + C_8 \tau) \cos \tau, \\ y &= 2C_2/3 + C_4(2+16/9) + 4C_3 \tau/3 + \\ &\quad + (0.3C_6 - 0.5C_7 - 0.5C_8 \tau) \sin \tau + \\ &\quad + (0.5C_5 + 0.3C_8 + 0.5C_6 \tau) \cos \tau, \end{aligned} \quad (5)$$

полученными в работе [6] в результате решения общей вариационной задачи Лагранжа, то есть задачи на условный экстремум функционала  $J = \int_0^T u^2(\tau) dt$ , когда на векторную функцию  $\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  наложены дифференциальные связи, задаваемые линейной динамической моделью относительного движения АА в орбитальной ОСК [15–18]. В этих соотношениях постоянные  $C_1 \dots C_8$  являются функциями краевых условий и периода барражирования  $T$ .

При барражировании относительно заданной опорной точки эти краевые условия имеют вид:

$$\vec{q}(T) = \vec{q}_k, \quad \vec{q}(0) = \vec{q}_0,$$

где  $\vec{q}_0$ ,  $\vec{q}_k$  – значения вектора относительного состояния АА в момент начала и в момент окончания очередного цикла барражирования.

Большой интерес для инженерной практики представляет отыскание квазиоптимальных программ управления ГП, то есть программ, близких к рассмотренным оптимальным программам по величине расхода энергии, но более простых с точки зрения их технической реализации. Одна из таких программ была получена в работе [4] в результате подстановки в уравнения динамической модели относительного движения АА закона изменения вектора относительного положения, имеющего вид:

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^4 \vec{C}_n \tau^{n-1}, \quad (6)$$

где  $\vec{C}_n$  – вектор произвольных постоянных.

Этот закон является общим решением векторного уравнения Эйлера – Пуассона  $\vec{R}'' = 0$ , в котором не учтены разностное и кориолисово ускорения. Используя выражения для экстремали (6) и ее первой производной, а также краевые условия  $\vec{R}(\tau_0) = \vec{R}_0$ ,  $\vec{V}(\tau_0) = \vec{V}_0$ ,  $\vec{R}(\tau_k) = \vec{R}_k$ ,  $\vec{V}(\tau_k) = \vec{V}_k$  после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений получаем значение вектора произвольных постоянных:

$$\vec{C}_1 = \vec{R}_0, \quad \vec{C}_2 = \vec{V}_0, \quad \vec{C}_3 = -[3(\vec{R}_0 - \vec{R}_k) + (2\vec{V}_0 + \vec{V}_k)T]/T^2,$$

$$\vec{C}_4 = [2(\vec{R}_0 - \vec{R}_k) + (2\vec{V}_0 + \vec{V}_k)T]/T^3,$$

где

$$T = \tau_k - \tau_0, \quad \tau_0 = 0.$$

Подстановка соотношения (6) и его производных в уравнение (1) дает квазиоптимальную программу управления:

$$\ddot{u} = \sum_{n=1}^4 \vec{A}_n \tau^{n-1}, \quad (7)$$

где

$$\vec{A}_1 = 2\vec{C}_3 - B\vec{C}_2 - A\vec{C}_1, \quad \vec{A}_2 = 6\vec{C}_4 - 2B\vec{C}_3 - A\vec{C}_2, \quad \vec{A}_3 = -3B\vec{C}_4 - A\vec{C}_3, \quad \vec{A}_4 = -A\vec{C}_4.$$

Подставляя уравнение (7) в соотношение (4), получим следующее выражение для показателя расхода энергии:

$$J = \sum_{k=1}^7 S_k T^k, \quad (8)$$

где

$$S_1 = \vec{A}_1^2, \quad S_2 = \vec{A}_1 \vec{A}_2, \quad S_3 = (\vec{A}_2^2 + 2\vec{A}_1 \vec{A}_3)/3, \\ S_4 = (\vec{A}_1 \vec{A}_4 + \vec{A}_2 \vec{A}_3)/2, \\ S_5 = (\vec{A}_3 + 2\vec{A}_2 \vec{A}_4)/5, \quad S_6 = \vec{A}_3 \vec{A}_4/6, \quad S_7 = \vec{A}_4^2/7.$$

При осуществлении барражирования относительно заданной опорной точки входящие в состав

программы (8) параметры  $\vec{A}_1 \dots \vec{A}_4$  выражаются через краевые условия и период барражирования следующим образом:

$$\vec{A}_1 = -6\vec{V}_0/T - B\vec{V}_0 - A\vec{R}_0, \quad \vec{A}_2 = 12\vec{V}_0/T^2 + 6B\vec{V}_0/T - A\vec{V}_0, \\ \vec{A}_3 = 3A\vec{V}_0/T - 6B\vec{V}_0/T^2, \quad \vec{A}_4 = -2A\vec{V}_0/T^2,$$

а закон изменения вектора  $\vec{R}$  на программной траектории определяется соотношением (6), где произвольные постоянные  $\vec{C}_1 = \vec{R}_0$ ,  $\vec{C}_2 = \vec{V}_0$ ,  $\vec{C}_3 = -3\vec{V}_0/T$ ,  $\vec{C}_4 = 2\vec{V}_0/T^2$ . Подставляя значения параметров  $\vec{A}_1 \dots \vec{A}_4$  в соотношение (8), получим величину показателя ЭЗ, требуемых для квазиоптимального барражирования:

$$J = T^3 (A\vec{V}_0)^2 / 210 + T[0.2(B\vec{V}_0)^2 + 0.4\vec{V}_0(A\vec{V}_0) + (A\vec{R}_0)^2] + 12\vec{V}_0^2/T.$$

Оптимальное значение периода барражирования, найденное из условия

$$dJ/dT = 0, \quad T_3 = (p \pm \sqrt{p^2 + q})^{0.5}, \quad (9)$$

где

$$p = -[7(B\vec{V}_0)^2 + 14\vec{V}_0(A\vec{V}_0) + 35(A\vec{R}_0)^2] / (A\vec{V}_0)^2, \\ q = 840\vec{V}_0^2 / (A\vec{V}_0)^2.$$

При компланарном барражировании в орбитальной ОСК

$$(A\vec{V}_0)^2 = 9\dot{y}_0^2, \quad (B\vec{V}_0)^2 = 4(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2), \quad \vec{V}_0(A\vec{V}_0) = 3\dot{y}_0^2, \\ (A\vec{R}_0)^2 = 9y_0^2, \quad \vec{V}_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$$

и соотношения для показателя ЭЗ и периода  $T_3$  принимают вид:

$$J = 3\dot{y}_0^2 T^3 / 70 + (0.8\dot{x}_0^2 + 2\dot{y}_0^2 + 9y_0^2)T + 12(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)/T,$$

$$p = -35(2\dot{y}_0^2 + 0.8\dot{x}_0^2 + 9y_0^2) / 9\dot{y}_0^2, \quad q = 280(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) / 3\dot{y}_0^2.$$

Если  $\dot{y}_0 = 0$ , то для  $T_3$  имеем особый вид решения:

$$T_3 = [12\dot{x}_0^2 / (0.8\dot{x}_0^2 + 9y_0^2)]^{0.5}.$$

Представляет интерес случай, когда заданная опорная точка лежит на круговой компланарной орбите. Тогда  $\dot{x}_0 = 1.5y_0$ ,  $\dot{y}_0 = 0$  и, следовательно,  $J = y_0^2(10.8T + 27/T)$ ,  $T_3 = \sqrt{2.5} \approx 1.58$ . Видно, что здесь показатель ЭЗ зависит только от разности высот орбит  $y_0$  и периода барражирования  $T$ , причем опти-

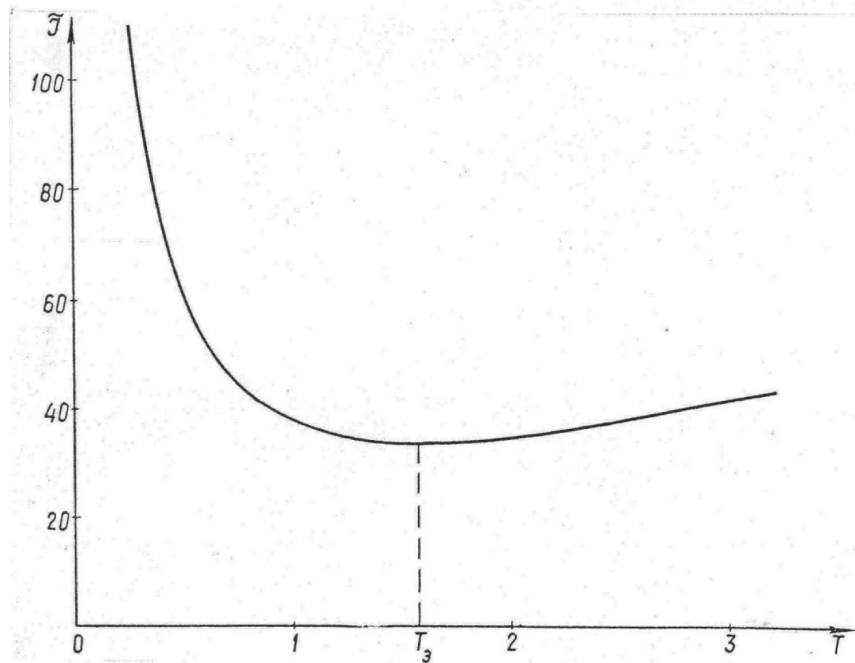


Рис. 1. Зависимость показателя энергетических затрат от величины периода барражирования

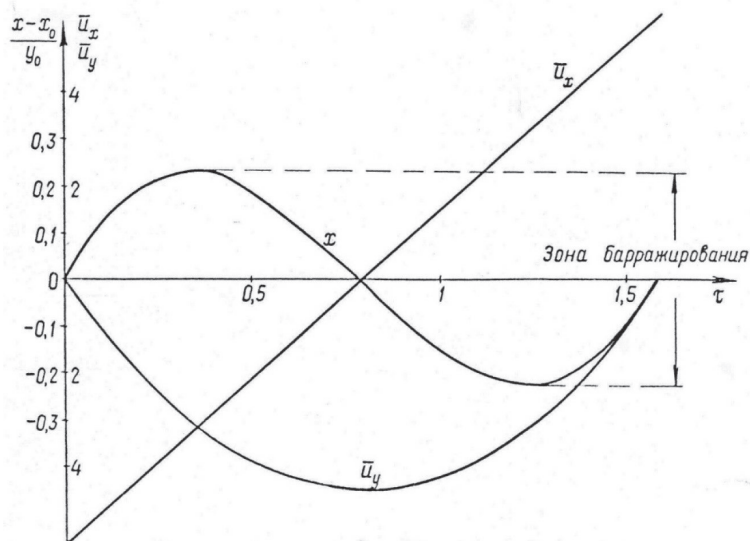


Рис. 2. Характер изменения составляющих управления и координаты  $x$  в течение цикла барражирования

мальное значение периода является величиной постоянной. Показатель ЭЗ, соответствующий этому  $T_3$ ,  $J_3 = 54 y_0^2 / \sqrt{2.5} \approx 34.15 y_0^2$ . На рис. 1 представлена зависимость показателя  $\tilde{J} = J / y_0$  от величины периода  $T$ .

Видно, что отклонение периода от его экстремального значения в меньшую сторону приводит к более значительному возрастанию ЭЗ, чем аналогичные отклонения в большую сторону. Однако здесь надо еще учитывать, что с ростом  $T$  увеличиваются размеры зоны барражирования. Квазиоптимальные управляющие функции для рассматриваемого случая имеют вид  $u_x = 9 y_0 (2\tau/T - 1)/T$ ,  $u_y = 18 y_0 \tau (\tau/T - 1)$ , а соответствующая им программная траектория  $x = x_0 + y_0 \tau (1.5 - 4.5\tau/T + 3\tau^2/T^2)$ ,  $y = y_0$ . Видно, что барражирование происходит вдоль прямой, параллельной местному горизонту, при этом размеры зоны барражирования  $\Delta x = x_{\max} - x_{\min} \approx 0.289 y_0 T$  при заданной разности высот  $y_0$  прямо пропорциональны периоду  $T$ . Характер изменения управляющих функций и координаты  $x$  в течение одного цикла барражирования при  $T = T_3 \approx 1.58$  иллюстрируется рис. 2.

### Литература

1. Балахонцев, В. Г. Сближение в космосе / В.Г. Балахонцев, В.А. Иванов, В.И. Шабанов. – Москва : Воениздат, 1973. – 240 с.
2. Гончаревский, В. С. Основы теории управления встречей на орбите / В.С. Гончаревский. – Москва : Изд-во МО СССР, 1973. – 229 с.
3. Гончаревский, В. С. Радиоуправление сближением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – Москва : Советское радио, 1976. – 240 с.
4. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – Москва : МО РФ, 1998. – 87 с.
5. Гончаревский, В. С. Групповой полет космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – Москва : МО РФ, 2006. – 81 с.
6. Гончаревский, В. С. Оптимальное непрерывное управление барражированием космического аппарата / В.С. Гончаревский // Информация и Космос. – 2022. – № 3. – С. 140–144.
7. Гончаревский, В. С. Теоретические основы управления взаимным маневром космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – Санкт-Петербург : ВКА им. А.Ф. Можайского, 2024. – 326 с.
8. Ермилов, Ю. А. Управление сближением космических аппаратов / Ю.А. Ермилов, Е.Е. Иванова, С.В. Пантюшин. – Москва : Наука, 1977. – 448 с.
9. Иванов, Н. М. Баллистика и навигация космических аппаратов / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 523 с.
10. Кубасов, В. Н. Методы сближения на орбите / В.Н. Кубасов, Г.Ю. Данков, Ю.П. Яблонько. – Москва : Машиностроение, 1985. – 184 с.
11. Лебедев, А. А. Встреча на орбите / А.А. Лебедев, В.Б. Соколов. – Москва : Машиностроение, 1969. – 368 с.

12. Пономарев, В. М. Теория управления движением космических аппаратов / В.М. Пономарев. – Москва : Наука, 1965. – 456 с.

13. Разыграев, А. П. Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей / А.П. Разыграев. – Москва : Машиностроение, 1977. – 472 с.

14. Титов, Г. С. Межорбитальные локальные маневры космических аппаратов / Г.С. Титов, В.А. Иванов, В.Л. Горьков. – Москва : Машиностроение, 1982. – 246 с.

15. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – Москва : Физматгиз, 1961. – 228 с.

16. Лернер, А. Я. Оптимальное управление / А.Я. Лернер, Е.А. Розенман. – Москва : Энергия, 1970. – 360 с.

17. Петров, Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Ленинград : Энергия, 1977. – 280 с.

18. Эльсгольд, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольд. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.