Оптимальное в смысле заполнения квантование информации при наличии ошибок в квантах

Optimum in sense of filling quantization of the information in the presence of errors in quanta

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
профессор кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Бубнов / Bubnov V.
Владимир Петрович
(bubnov1950@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор.
ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей сообщения императора Александра I», профессор кафедры «Информационные и вычислительные системы».
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: оптимальное квантование информации – optimum quantization of the information; несущая и несомая случайные величины – bearing and carried random variables; ошибки в квантах – errors in quanta; контроль и исправление ошибок – control and correction of errors; пробел между квантами – blank between quanta; достоверность и потери квантования – reliability and quantization losses.

Рассматривается задача оптимального квантования информации в смысле заполнения при условии, когда в квантах возникают случайные ошибки, обусловленные воздействием различных возмущающих факторов. Величина пробела между квантами определяется не фиксированным значением из тактических соображений, как ранее, а размером интервала, в течение которого с определённой вероятностью ошибки в кванте выявляются и исправляются. Определяются необходимые параметры оптимального квантования информации.

The problem of optimum quantization of the information in sense of filling is considered under a condition when in quanta there are the random errors caused by influence of various revolting factors. The blank size between quanta is defined by not fixed value from tactical reasons as earlier, and the size of an interval during which with certain probability of an error in quantum come to light and corrected. Necessary parameters of optimum quantization of the information are defined.

Введение

Порция (часть) энергии, материи, вещества, света, действия, потока, поля и так далее называется квантом. С появлением и развитием теории информации термин квант стал применяться и в теории информации. Процесс представления определённого количества информации в виде совокупности квантов называется квантованием информации.

Информационные процессы могут сопровождаться своими издержками. Например, при звуковой трансляции текстов, музыки по радио, телевидению временные издержками связаны с необходимостью введения пауз, позволяющих воспринимать их на слух. Письменное представление содержания книги связано с неизбежными издержками на размер шрифта, интервалы между словами, строками. За введение любых издержек, позволяющих улучшить качество восприятия, передачи, хранения информации, приходится платить. Минимизировать величину издержек и их стоимость необходимо и в теории информации, особенно в условиях современного информационного бума.

Первые основополагающие результаты решения класса задач оптимального квантования случайной величины были получены в [1, 2]. В статье [1] решена задача теории ценности информации с учётом её стоимости. Оптимизируемая функция представлена в виде математического ожидания величины потерь:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty [x(E(z/x)+1) - z]dF(z) + cJ + \text{const},$$
$$J = \int_0^\infty E(z/x)dF(z). \qquad (1)$$

Первое слагаемое – средние потери за счёт искажения значения случайной величины информации $\hat{Z}$ в результате квантования, второе слагаемое – потери за счёт использования неполного количества информации J.

1-2021.indd 40 29.03.2021 14:15:25

Авторы работы [2], цитируя статью [1], аналогичную минимизируемую функцию квантуемой величины представляют в виде:

$$\Psi(x) = (x + c)\int_0^\infty (E(z/x) + 1)dF(z), \qquad (2)$$

где x, c – величина кванта и величина промежутка между квантами, $E(\alpha)$ –целая часть числа α, $F(z)$ – функция распределения квантуемой случайной величины $\hat{X}$, имеющей конечное математическое ожидание. Необходимо отметить, на основе этого подхода были разработаны математические модели детерминированных и случайных процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения [3].

Преимуществами работы [2] по сравнению с [1] является то, что авторы предложили простую физическую иллюстрацию и разработали строгий алгоритм целочисленного решения дискретной задачи.

Любой квант в условиях реальной среды подвержен воздействию ряду случайных факторов, являющихся источниками возникновения различных неопределённостей. Поэтому кванты информации при хранении, передаче, преобразовании сами могут являться источниками ошибок, деструктивных элементов, приводящих к снижению достоверности информации.

Целью данной статьи является разработка метода квантования информации при наличии ошибок в квантах, определение влияния процесса контроля за ошибками и предложения рекомендаций для обеспечения и повышения достоверности квантуемой информации.

Физическая интерпретация реального процесса квантования информации с ошибками и способом повышения его достоверности

Предположим, что некоторый субъект последовательно выполняет вычисление по некоторому численному алгоритму. Оно состоит из ряда элементарных операций. После выполнения некоторого небольшого числа операций он должен убедиться, не содержит ли выполненная им работа ошибок. Можно повторить выполненные вычисления для того, чтобы найти ошибки, исправить их и убедиться в правильности выполненных расчётов. При этом потратится время на поиск ошибок и их исправление. Убедившись в верности результата, можно приступить к продолжению расчётов по заданному алгоритму. Время поиска ошибок и их исправления и составляют издержки вычисления, или паузу между последовательными этапами вычислений. Если кванты вычислений будут примерно одинаковыми по сложности, то и промежутки будут примерно одинаковыми. При малых квантах вычислений будет наблюдаться большое число промежутков, приводящих к большим потерям времени (временным издержкам). При больших квантах вычислений будет наблюдаться меньшее число промежутков, но и время на поиск и устранение ошибок для каждого кванта значительно возрастет. Если число квантов должно быть целым числом, то незаполненная часть последнего кванта может составить большую часть потерь времени. На основании проведенного качественного анализа приходим к необходимости нахождения минимального значения математического ожидания затрат времени на квантование случайной величины, подчинённой некоторому распределению, как это показано в работах [1, 2].

Однако в постановке, представленной в [2], величина пробела c между квантами выбирается из соображений удобства практической различимости квантов. В данной статье в постановке задачи величина пробела определяется исходя из затрат времени и на контроль, и на исправление ошибок.

Простейшая математическая модель с ошибками в квантах. Каждый квант длиной x состоит их элементарных квантов единичной длины, то есть содержит x элементарных квантов. Каждый элементарный квант представляет правильную информацию с вероятностью p. На выходе контрольного устройства в течение пробела-задержки длиной c наблюдаются только правильные элементарные кванты. Таким образом, размер реального информационного кванта равен xp^x.

Пусть пробелы между квантами равны c = 5 ед., закон распределения поступающей информации – нормальный с плотностью вероятности $f(x) = d\ \mathrm{norm}(x, m, \sigma)$, и параметрами m = 100 ед., σ =20 ед. Требуется найти математическое ожидание случайной величины, представленной в квантованном виде с пробелами и целым числом квантов, а также другие её параметры.

Математическое ожидание квантованной величины $\hat{X}$ через совокупность реальных информационных квантов можно представить в виде:

$$M(p) = (xp^x + c)\int_0^\infty \left[E\left(\frac{z}{xp^x}\right) + 1 \right] dF(z) \Bigg]. \qquad (3)$$

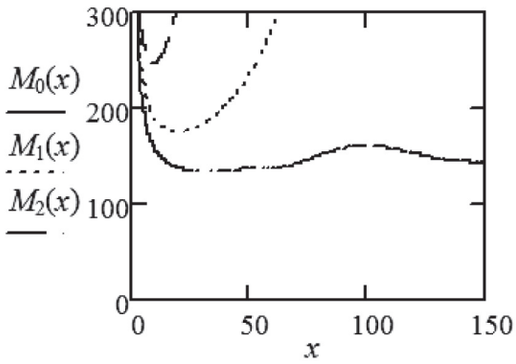

Рис. 1.

1-2021.indd 41 23.03.2021 14:15:25

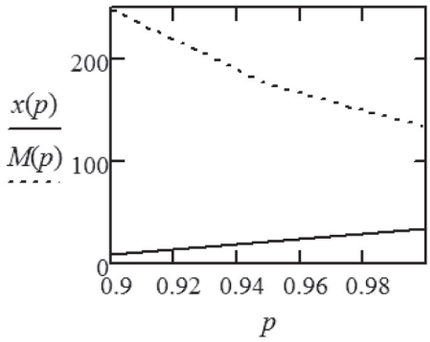

Рис. 2.

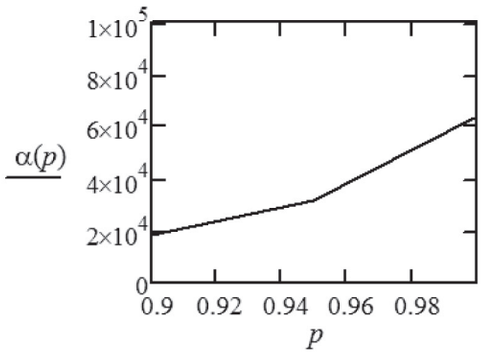

Рис. 3.

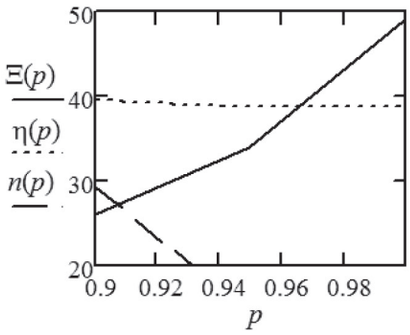

Рис. 4.

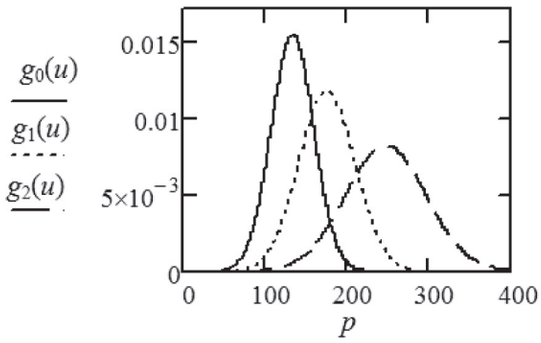

Рис. 5.

На рис. 1 представлены графики выражения (3). Кривые на рисунке получены при следующих условиях: $M_0(x)$ при $p = 0{,}999$, $M_1(x) - p = 0{,}95$, $M_2(x) - p = 0{,}9$. Оптимальные значения квантов равны: 34,20 ед., а минимальные значения математических ожиданий квантованной величины для значений p 0,999, 0,95, 0,9 соответственно равны – 134,049; 175,825; 247,588 ед.

На основе анализа рис. 1 следует, что, чем больше величина вероятности сохранения элементарного кванта в процессе контроля, тем больше математическое ожидание квантованной величины $\hat{X}$ и тем меньше величина оптимального кванта сохранения правильной информации. На рис. 2–5 показаны результаты расчётов параметров квантования. На оси абсцисс всех четырёх графиков отложена величина вероятности контроля кванта. На рис. 2 приведены графики минимальной величины математического ожидания квантованной величины и оптимальной величины кванта. На рис. 3 показана зависимость второго начального момента квантованной величины. На рис. 4 представлены графики среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации, увеличенного в 200 раз, и количества оптимальных квантов квантованной величины. На рис. 5 изображены плотности вероятностей случайных величин квантованных значений $g_i(u)$, $i = 0,\ 1,\ 2$ для тех же значений вероятностей 0,999; 0,95; 0,9.

Представляет интерес оценить потери от использования квантования при различных значениях вероятностей p. Для этого воспользуемся следующей формулой для оценивания величин потерь:

$$\Pi_i = c(n_{0i} - 1) + x_{0i} - \int_0^\infty \left(z - x_{0i} E\left(\frac{z}{x_{0i}} \right) \right) f(z)dz,\ i = 0,\ 1,\ 2. \tag{4}$$

Потери для $M_0(x)$ при $p = 0{,}99$ составляют 29,702 ед. Потери $M_1(x)$ при $p = 0{,}95$ составляют 77,240 ед. Потери $M_2(x)$ при $p = 0{,}9$ составляют 145,365 ед.

Из полученных по формуле (4) оценок потерь следует, что величина потерь при квантовании с уменьшением вероятности p увеличивается.

Кроме выполненного оценивания произведём также сравнение результатов квантования для двух моделей при $p = 0{,}999$:

$$M_0(x) = (xp^x + c)\int_0^\infty \left(E\left(\frac{z}{xp^x} \right) + 1 \right) f(z)dz,$$

$$M_3(x) = (xp^x + c)\int_0^\infty \left(E\left(\frac{z}{x} \right) + 1 \right) f(z)dz, \tag{5}$$

1-2021.indd 42 29.03.2021 14:15:26

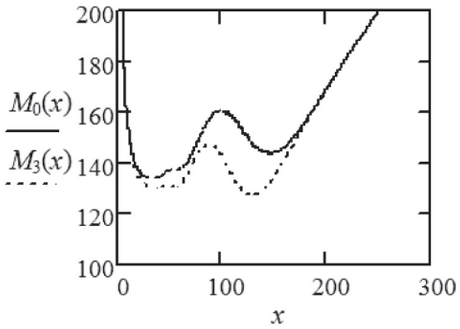

Рис. 6.

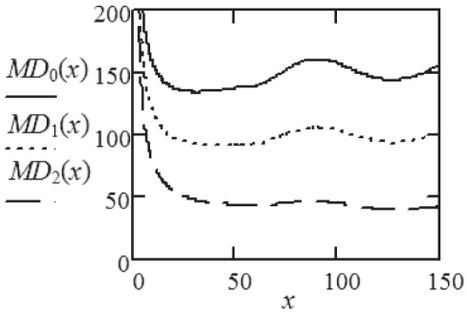

Рис. 7.

у которых имеется различие в знаменателе аргумента функции $E(a)$.Оно означает, что при определении числа квантов величина вероятности p во внимание не принимается. Графически результат сравнения показан на рис. 6. У второй модели математическое ожидание квантованной величины меньше, чем у первой, а величина его минимума смещена вправо относительно минимума первой модели. Оптимальная величина кванта первой модели – 34 ед., а минимум при нём равен 134,090 ед. Оптимальная величина кванта второй модели – 129 ед., а минимум при нём равен 127,078 ед. Потери при $p = 0{,}999$ для $M_0(x_0)$ составят 5,293 ед., а для $M_3(x_0)$ – 50,683 ед. Далее интересно сопоставить значения количества получаемой информации каждым квантом в отдельности для этих двух указанных моделей.

Рассмотрение возможных стратегий выполнения контроля квантов

В предыдущем разделе была рассмотрена простейшая модель контроля кванта информации с некоторой, произвольно допускаемой вероятностью p. Было показано, как зависят величина кванта и математическое ожидание поступившей квантованной величины количества информации от вероятности p. Определены их оптимальные значения при заданной величине пробела c. Однако связь между величинами p и c не устанавливалась, а предполагалось, что они независимы друг от друга. Это означает, что после возможного контроля истинности кванта не предпринималось никаких мероприятий для повышения его достоверности.

В реальных условиях контроль истинности кванта может производиться различными способами с последующим изменением величин p и c. Например, если предположить, что некоторое лицо производит по заданному алгоритму последовательные математические вычисления для достижения определенного конечного надёжного результата. Оно должно выбрать такую величину элементарного кванта, которая позволит ему при минимальных затратах усилий и времени проконтролировать правильность своих действий и в случае, если эти действия неправильны, каким-то образом исправить их и лишь потом перейти к вычислению следующего кванта алгоритма. Конечно, кванты вычислений и пробелы для контроля могут быть различной величины при реализации алгоритма вычислений. Кроме того, способы контроля и пробелы между квантами становятся зависимыми друг от друга.

Кванты информации могут формироваться аппаратными, программными средствами или живыми организмами. Поэтому следует предусматривать способы контроля именно в таких системах и соответствующие им способы повышения достоверности контроля. Способы повышения достоверности контроля указанных средств хорошо известны. Поэтому для решения задачи надёжного квантования целесообразно воспользоваться ими для определения возможных стратегий контроля и моделей для оценивания его достоверности.

Пример 1. Источник сообщений передаёт информацию получателю пакетами, включающими некоторое количество байтов. Каждый байт пакета троируется устройством параллельно с последующей обработкой частных байтов на мажоритарном устройстве для повышения достоверности представления информации. Между передачей пакетов предусмотрены временные пробелы для разделения квантов передаваемой информации с целью выявления и исправления возможных ошибок в пакетах. Таким образом, полагаем, что величина пробела зависит от конструкции пакета и достоверности представленной в нем информации. Необходимо было бы в интересах практики выполнить количественное исследование данной задачи.

Однако непосредственное решение данной задачи примера нам представляется достаточно затруднительным. Поэтому изучим сначала более простую задачу, связанную с учётом характеристик контроля процесса квантования информации.

Источник информации генерирует реализацию случайного количества информации, распределённого по некоторому вероятностному закону с плотностью вероятности $f(x)$, обладающей конечным математическим ожиданием и дисперсией. Сигнал от источника поступает одновременно к двум независимым получателям. Получатели формируют одинаковый по величине квант информации x. Правильность (безошибочность) каждого кванта равна p. На идеальном сравнивающем устройстве оба кванта

1-2021.indd 43 23.03.2021 14:15:26

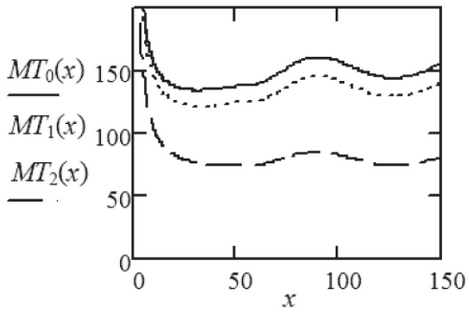

Рис. 8.

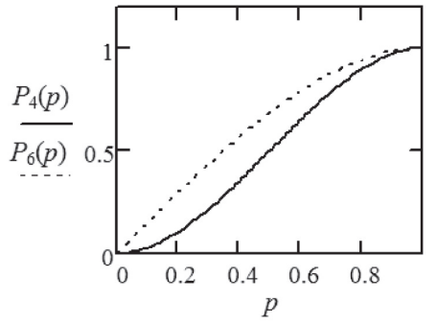

Рис. 9.

сравниваются, и окончательно поступает к потребителю величина xp^2, после которой делается пропуск постоянной величины c. Далее процесс квантования информации продолжается до полной реализации процесса. Требуется найти минимальное значение результата квантования при условии, что для недостающей до полного кванта информации выделяется полный квант. Выражение для математического ожидания квантованной величины представляется в виде:

$$MD(x) = (xp^2 + c)\int_0^\infty \left[E\left(\frac{z}{x}\right) + 1 \right] f(z)dz, \qquad (6)$$

где E – наибольшая целая часть числа, указанного в скобках $E(\alpha)$. Существует минимальное значение (6), которое находится только численно при решении данной нелинейной задачи. Пусть минимум (6) $\min MD(x_0)$ находится при значении x_0. Для цели приложения решения (6) могут находиться значения других параметров в точке x_0, такие, например, как оптимальное число квантов, величина оптимального кванта, дисперсия, среднеквадратическое значение, коэффициент вариации квантованной реализации и другие.

1. Пусть заданы следующие исходные данные: количество информации, поступающей от источника, определяется плотностью вероятности $f(x) = d\mathrm{norm}(x, m, \sigma)$, m = 100 ед., σ = 20 ед., величина пробела между квантами c = 5 ед. Контроль правильности квантов производится дублированием их с определением совместной вероятности p^2. Тогда величина математического ожидания определяется по формуле (6). На рис. 7 показаны графики функций (6) при значениях p = 1; 0,8; 0,5. Графики обозначены соответственно как $MD_0(x)$, $MD_1(x)$, $MD_2(x)$. В таблице 1 приведены данные расчёта для $\min MD(x_0)$: $M(x_0)$ минимального значения математического ожидания количества квантованной информации, x_0 – оптимального значения кванта, n_0 – оптимального числа квантов, k – реальной величины квантов, $\alpha(x_0)$ – второго начального момента значения количества квантованной информации, $\sigma(x_0)$ – среднего квадратического отклонения количества квантованной информации, и соответствующего значения коэффициента вариации $\eta(x_0)$.

$$p_{MУ} = 3p^2 - 2p^3, \qquad (7)$$

где p – вероятность того, квант информации любого получателя является верным. Поэтому математическое ожидание количества квантованной информации может быть записано в виде:

$$MT(x) = (xp_{MУ} + c)\int_0^\infty \left[E\left(\frac{z}{x}\right) + 1 \right] f(z)dz. \qquad (8)$$

На рис. 8 показаны графики функций (8) при значениях p= 1; 0,8; 0,5. Графики обозначены соответственно как $MT_0(x)$, $MT_1(x)$, $MT_2(x)$.

В таблице 2 приведены расчётные значения для аналогичных параметров, указанных ранее в таблице 1, но для случая выполнения мажоритарного контроля правильности принятия решений тремя получателями.

Относительные потери к математическим ожиданиям при квантовании с дублированием и мажоритированием показаны в процентах в последних колонках таблиц 1 и 2.

Из результатов исследования следует, что контроль дублированием квантов недостоверной информации приводит к существенному снижению эффекта от квантованного представления информации. Чем меньше величина вероятности контроля при дублировании, тем меньше этот эффект. При введении большего количества дублирующих каналов эффект ещё более будет снижаться.

Применение мажоритарного способа контроля квантов недостоверной информации, напротив, является весьма эффективным средством повышения достоверности информации. Даже при низкой вероятности контроля любого одного кванта мажоритарная схема «два из трёх» приводит к повышению вероятности получения достоверной информации кванта. Чем больше вероятность контроля одного канала схемы, тем больше эффект контроля троированной схемы кванта. При использовании мажоритирования по схеме «три из пяти» или более, отмеченный эффект будет только возрастать. Следует отметить, что мажоритарная схема рассматривалась при допущении, что любой информационный квант подвержен только одному виду

1-2021.indd 44 29.03.2021 14:15:27

Таблица 1

Номер модели	Параметры							
	$M(x_0)$	x_0	n_0	k	$\alpha(x_0)$	$\sigma(x_0)$	$\eta(x_0)$	$\Pi(x_0)$ / %
MD_0	134,143	32	3,625	37	$1{,}864\times10^4$	25,41	0,189	29,144/29
MD_1	91,772	39	3,063	29,96	$8{,}728\times10^3$	17,49	0,191	29,785/33
MD_2	39,987	129	1,073	37,25	$1{,}693\times10^3$	9,70	0,243	38,843/100

Таблица 2

Номер модели	Параметры							
	$M(x_0)$	x_0	n_0	k	$\alpha(x_0)$	$\sigma(x_0)$	$\eta(x_0)$	$\Pi(x_0)$ / %
MT_0	134,143	32	3,625	37,00	$1{,}864\times10^4$	25,41	0,189	29,132/29
MT_1	122,029	33	3,53	34,57	$1{,}543\times10^4$	23,22	0,190	29,145/24
MT_2	74,563	127	1,089	68,50	$5{,}938\times10^3$	19,45	0,261	38,686/52

неисправности: исчезновение сигнала или появление ложного сигнала. Реально могут наблюдаться оба вида неисправностей, в равновероятном случае возникновения они компенсируют друг друга. Формула (7) в данном случае принимает следующую форму:

$$P_{MY} = 3p^2 - 2p^3 + 6pq_0q_1, \qquad (9)$$

где q_0 – вероятность ложного «нуля», а q_1 – вероятность ложной «единицы».

Можно записать выражения $q_0 = \varphi(1-p)$, $q_1 = (1-\varphi)(1-p)$, в которых φ, $1-\varphi$ – условные вероятности появления «ложного нуля» и «ложной единицы». В лучшем случае, когда они обе равны 0,5, $q_0 = q_1 = 0{,}5(1-p)$, тогда формула (9) принимает вид:

$$P_{MY} = 1{,}5\,p - 0{,}5\,p^3. \qquad (10)$$

На рис. 9 для сравнения представлены зависимости (7) и (9).

Подставляя значение вероятности (9) вместо (7) в выражения для $MT_1(x)$, $MT_2(x)$ и вычисляя их при p = 1; 0,8; 0,5, можно убедиться, что графики этих функций сдвинутся вверх на рис. 8, приблизившись к графику функции $MT_0(x)$, вычисленному при $p = 1$. Это подтверждает положительный эффект влияния на увеличение достоверности мажоритарного контроля кванта при противоположных и равновероятных неисправностях любого одиночного канала схемы.

Оценивание информационного эффекта всего процесса оптимального квантования и его отдельных квантов

Пусть случайная величина $\hat{Z}$, распределённая с плотностью вероятности $f(z)$, $z \in [0,\infty)$, является первичной случайной величиной. Для краткости назовём её несущей. На неё накладывается другая величина, которая может быть либо неслучайной, либо случайной. Для простоты изложения полагаем, что она неслучайна. Например, пусть это будет плотность некоторой содержательной информации об интересующем нас объекте. Тогда, суммируя эту плотность на протяжении несущей случайной величины $\hat{Z}$ или её части, можно получить суммарное количество интересующего нас информационного продукта на определённом интервале x. И на основании этого можно иметь представление о распределении продукта на нём. Поясним это на примере.

Пример 2. Материал примера будет основываться только на рассмотренном мажоритарном контроле и связанным с ним рис. 8. Информационную (несомую) функцию зададим в следующем виде:

$$G(x) = 2\,\Phi(x)\,(\sin(0{,}04))^2. \qquad (11)$$

На рис. 10 представлен график этой функции.

Рассмотрим исходную функцию при идеальном контроле:

1-2021.indd 45 23.03.2021 14:15:28

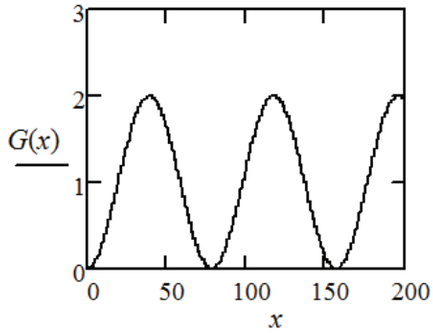

Рис. 10.

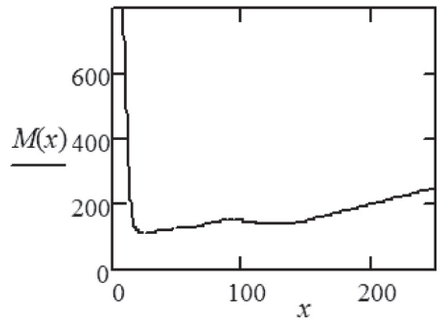

Рис. 11.

$$MT_0(x) = (x+c)\int_0^{\infty}\left[E\left(\frac{z}{x}\right)+1\right]f(z)dz\,. \qquad (12)$$

Минимум этой функции достигается при $x_0 = 32$ ед. Ожидаемое здесь число квантов равно $n_0 = 3{,}625$. Вычисленное полное количество информации, полученное на интервале $[0, \infty)$:

$$IT_0 = \int_0^{\infty} G(z)f(z)dz = 1{,}04\,\text{ед.} \qquad (13)$$

Вычислим количество информации, получаемое на каждом оптимальном кванте:

$$I_{01} = \int_0^{32} G(z)f(z)dz = 5{,}123\times10^{-4}\ \text{ед.};$$

$$I_{02} = \int_{32}^{64} G(z)f(z)dz = 0{,}041\,\text{ед.};$$

$$I_{03} = \int_{64}^{96} G(z)f(z)dz = 0{,}110\ \text{ед.};$$

$$I_{04} = \int_{96}^{128} G(z)f(z)dz = 0{,}803\ \text{ед.};$$

$$I_{05} = \int_{128}^{160} G(z)f(z)dz = 0{,}086\ \text{ед.};$$

$$I_{06} = \int_{160}^{192} G(z)f(z)dz = 3{,}714\times10^{-4}\,\text{ед.}$$

Практически значимыми квантами являются I_{02}, I_{03}, I_{04}, I_{05}, поэтому в сумме они и дают

$$\sum_2^5 I_{0i} = 1{,}04\ \text{ед.}$$

Теперь рассмотрим исходную функцию при контроле с $p = 0{,}8$; $P_{МУ} = 0{,}896$:

$$MT_1(x) = (xP_{МУ}+c)\int_0^{\infty}\left[E\left(\frac{z}{x}\right)+1\right]f(z)dz\,.$$

Минимум функции достигается при $x_0 = 33$ ед. Ожидаемое число квантов равно $n_0 = 3{,}53$. Полное количество информации, полученное на интервале $[0, \infty)$ равно $IT_1 = 1{,}04$. Количества информации, получаемые на различных оптимальных квантах, будут равны:

$$IT_{11} = \int_0^{33} G(z)f(z)dz = 6{,}37\times10^{-4}\ \text{ед.};$$

$$IT_{12} = \int_{33}^{66} G(z)f(z)dz = 0{,}046\,\text{ед.};$$

$$IT_{13} = \int_{69}^{99} G(z)f(z)dz = 0{,}161\ \text{ед.};$$

$$IT_{14} = \int_{96}^{132} G(z)f(z)dz = 0{,}787\ \text{ед.};$$

$$IT_{15} = \int_{132}^{165} G(z)f(z)dz = 0{,}046\ \text{ед.};$$

$$IT_{16} = \int_{165}^{198} G(z)f(z)dz = 3{,}067\times10^{-4}\,\text{ед.}$$

Практически значимыми квантами являются IT_{12}, IT_{13}, IT_{14}, IT_{15}, поэтому в сумме они дают полное количество информации

$$\sum_2^5 IT_{1i} = 1{,}04\ \text{ед.}$$

Рассмотрим исходную функцию при контроле с $p = 0{,}5$; $P_{МУ} = 0{,}5$:

$$MT_2(x) = (xP_{МУ}+c)\int_0^{\infty}\left[E\left(\frac{z}{x}\right)+1\right]f(z)dz\,.$$

Минимум функции достигается при $x_0 = 127$ ед. Ожидаемое число квантов равно $n_0 = 1{,}089$. Полное количество информации равно $IT_{12} = 1{,}04$ ед. Количе-

1-2021.indd 46 23.03.2021 14:15:29

ство информации по квантам распределялось следующим образом: $IT_{21} = 0{,}941$; $IT_{22} = 0{,}1$ ед.; $IT_{23} = 7{,}46 \cdot 10^{-15}$ ед. Суммарное количество информации будет равно:

$$\sum_{1}^{2} IT_{2i} = 1{,}041 \text{ ед.}$$

Какой можно сделать вывод о распределении количества накопленной несомой информации по квантам при решении задачи оптимального в смысле заполнения информации, если изменяется вероятность контроля?

1. С изменением вероятности контроля изменяется распределение накопленной информации по квантам (приведём только наиболее значимые):

– при $p = 1$

$$I_{02} = 0{,}041;\ I_{03} = 0{,}110;\ I_{04} = 0{,}803;\ I_{05} = 0{,}086;$$

– при $p = 0{,}896$

$$IT_{12} = 0{,}046;\ IT_{13} = 0{,}161;\ IT_{14} = 0{,}787;\ IT_{15} = 0{,}046;$$

– при $p = 0{,}5$

$$IT_{21} = 0{,}941;\ IT_{22} = 0{,}100;\ IT_{23} = 7{,}46 \times 10^{-15};\ IT_{24} = 0.$$

2. С уменьшением величины вероятности контроля увеличивается длина оптимального кванта, значимость кванта по величине информации смещается справа налево.

3. При самой низкой граничной вероятности контроля мажоритарной схемы $p = 0{,}5$ самый левый квант становится самым значимым, а остальные кванты практически теряют свою значимость.

4. Количественная величина информационной значимости квантов зависит от вида несущей и «несомой» функций, их совместного наложения.

О чём говорит неравномерное распределение накопленной информации по квантам? Ответ на этот вопрос требует отдельного изучения и здесь не рассматривается.

Оценивание эффекта оптимального квантования при учёте накопления ошибок в течение кванта и восстановления безошибочности кванта в течение интервала простоя *c(x)*

Ранее предполагалось, что величина пробела между квантами c фиксирована и не зависит от величины канта x. В некоторых случайных процессах в квантах могут возникать ошибки, приводящие к искажению их информационного содержания. Закон возникновения ошибок может быть различным. При контроле квантов ошибки могут устраняться, однако на устранение требуются затраты времени. За счёт этого фиксированная величина пробела c может увеличиваться на время восстановления безошибочности предшествующего кванта. Пока будем предполагать, что $c = 0$, то есть пробелы будут формироваться только на основе затрат на восстановление кванта при его контроле. Сам контроль может выполняться с вероятностью единица или меньше её.

Рассмотрим случай, когда контроль по исправлению ошибок идеальный, а появление ошибок в случайном процессе подчинено закону Пуассона. На исправление одной ошибки в кванте затрачивается некоторое время τ. Тогда выражение для определения величины математического ожидания квантованной случайной величины $\hat{Z}$ с плотностью вероятности $f(z)$ будет записано в виде:

$$M(x) = \left(x + \tau \sum_{k=0}^{\infty} \left(k e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \right) \int_0^{\infty} \left[E\left(\frac{z}{x} \right) + 1 \right] f(z) dz, \quad (14)$$

где $c(x, \tau, \lambda) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \left(k e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right)$ – пробел между квантами, обусловленный временем исправления ошибочного кванта величиной x, в котором может возникнуть с интенсивностью λ некоторое среднее число $\bar{k}$ ошибок, распределённых по закону Пуассона. Так как процесс Пуассона стационарный, то можно полагать, что распределение числа ошибок в квантах не зависит от предыстории, а определяется только параметром λ и величиной кванта x. Рассмотрим пример расчёта математического ожидания.

Пример 3. Пусть известно, что $c = 0$, $m = 100$ ед., $\sigma = 20$ ед., $f(x) = denorm(x, m, \sigma)$, $\lambda = 1$ ед.$^{-1}$, $\tau = 10$ ед. Тогда по результатам расчётов по формуле (14) получим график, показанный на рис. 11. Минимальная величина квантованной случайной величины будет равна 112,36 ед. при кванте 24 ед. Второй начальный момент $\alpha(24) = 1{,}31 \cdot 10^4$ ед.^{2}, среднее квадратическое отклонение $\delta = 21{,}8$ ед., а коэффициент вариации – $\eta = 0{,}194$. Среднее число исправляемых ошибок в течение x_0 при $\bar{k} = 10$ ошибок равно 0,01, а время, потребное для их исправления, составит 0,102 ед.. При этом число квантов равно 4,661. Вычисление по формуле (14) в виде произведения двух сомножителей даёт $24{,}102 \cdot 4{,}662 = 112{,}364$, что свидетельствует о достаточной близости к $M(24)$ по графику.

Замечание. При расчёте задержки, обусловленной способом контроля правильности кванта и величиной времени исправления ошибок, могут быть применены и другие вероятностные модели. Кроме того, если необходим учёт технологической задержки, то её величина может быть добавлена к величине задержки, связанной с исправлением правильности кванта.

Об оценивании потерь, связанных с квантованием

Если ошибки в квантах отсутствуют, то потери при квантовании определяются просто. Они равняются сумме всех пробелов между квантами плюс незаполненный остаток от последнего кванта, то есть

1-2021.indd 47 23.03.2021 14:15:31

$$\Pi = c(n_0 - 1) + x_0 - \int_0^\infty \left(z - x_0 E\left(\frac{z}{x_0}\right)\right) f(z)dz. \qquad (15)$$

Если производится контроль правильности квантов с учётом времени на их исправление, расчёт становится более сложным. В каждом конкретном случае модель для расчёта будет иметь свои особенности.

Пример 4. Расчёт по формуле (15). Дано: $c = 5$, $m = 100$, $\sigma = 20$, $f(x) = denorm(x, m, \sigma)$,

$$M(x) = (c + x)\int_0^\infty \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{z}{x}\right) + 1\right) f(z)dz;$$

$$\min M(x) = M(x_0) = M(30) = 134{,}147, \quad x_0 = 30;$$

$$n_0 = \int_0^\infty \left(\mathrm{trunc}\left(\frac{z}{x}\right) + 1\right) f(z)dz = 129{,}682;$$

$$\Pi = c \cdot (n_0 - 1) + x_0 - \int_0^\infty \left(z - x_0 \cdot \mathrm{trunc}\left(\frac{z}{x_0}\right)\right) f(z)dz = 29{,}167.$$

Заключение

В настоящей статье решается задача оптимального в смысле заполнения квантования информации при условии, что кванты могут содержать случайные ошибки, которые возникают из-за воздействия различных неучтенных факторов. В источниках [1, 2, 4] кванты считались безошибочными, а пробелы между квантами заранее фиксировались исходя из определённых соображений. В данной статье предложено определять величину пробела между квантами как функцию от числа случайных ошибок в квантах, вероятности контроля и времени их исправления. При необходимости величина пробела, вводимого для повышения достоверности квантов, может быть также увеличена, исходя из некоторых практических соображений, как это предусматривалось ранее [2].

Из методов контроля ошибок рассмотрены только два: контроль дублированием и мажоритарный контроль «два из трёх». Как и следовало ожидать, использование контроля дублированием приводит к снижению достоверности информации, а мажоритарный контроль при высокой вероятности контроля одного канала – к повышению достоверности информации. Достоверность становится тем больше, чем больше исходная вероятность канала. Кроме того, если имеются разнонаправленные ошибки канала, то она становится ещё больше, что определяется эффектом взаимной компенсации ошибок в мажоритарной схеме.

В статье рассматриваются два различных случайных процесса: исходный процесс, несущий, основной, служащий для квантования информации, и несомый процесс, наполненный конкретной объектной информацией. Они оба позволяют определять как общее накопленное всеми квантами количество информации, так и отдельное количество информации в каждом кванте. Замечена вариация количества информации в квантах при изменении величины вероятности контроля.

Приведено выражение для определения сравнительных потерь информации в зависимости от рассматриваемого способа квантования и вероятности контроля.

Полученные в статье результаты могут быть использованы в различных информационных приложениях. Они также могут служить основой для более глубоких теоретических исследований, например в [4].

Литература

1. Гришанин, Б. А. Учёт ценности информации в теории ценности информации / Б.А. Гришанов // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 2. – С. 9–10.

2. Андронов, А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации / А.М. Андронов, Т.Н. Бокоев // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.

3. Смагин, В. А. Математическая модель детерминированных и случайных процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения / В.А. Смагин, В.П. Бубнов // Автоматика на транспорте. – 2019. – № 2. – С. 145–159.

4. Smagin, V. A. Optimum likelihood quantization of the information in space with restriction of zones of influence of quanta / V.A. Smagin // Forum B.V. Gnedenko, RT&A #01(31). – 2014. – Vol. 9. – P. 92–97.

1-2021.indd 48 29.03.2021 14:15:32