Кусочно-постоянная аппроксимация в задаче фильтрации сигналов

Couscous-constant approximation in signal filtration task

Бутырский / Butyrsky E.
Евгений Юрьевич
(evgenira88@mail.ru)
доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ.
ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский Государственный университет", профессор кафедры теории управления.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: функция – function; аппроксимация – aproximation; сплайн – spline; динамическая система – dynamic system; сигнал – signal; процесс – process; алгоритм – algorithm; матрица – matrix; фильтрация – filtering.

В статье рассмотрена задача оценивания состояния нелинейной динамической системы, основанная на кусочно-постоянной аппроксимации нелинейных функций, входящих в уравнение состояния и наблюдения. Приведены примеры представленного метода в задачах фильтрации и показано, что применение кусочно-постоянной аппроксимации позволяет на порядок уменьшить вычислительные затраты. Для многомерных систем получены модели динамических систем и алгоритмы обработки в виде векторно-матричных уравнений.

The article considers the task of assessing the state of a nonlinear dynamic system, based on the bit-constant approximation of non-linear functions included in the state and observation equation. Examples of the method presented in filtration tasks are given and it is shown that the use of couscous and permanent approximation can reduce computational costs by an order of magnitude. Dynamic systems and processing algorithms in the form of vector-matrix equations have been obtained for multidimensional systems.

Введение

Математическое моделирование динамических процессов, возникающих на практике, является в настоящее время основным инструментом получения знаний об их поведении при различных способах воздействия. Одной из основных задач является оценка состояния изучаемого объекта (процесса). В случае линейных объектов эта задача решается путем применения процедуры Калмана-Бьюси.

Как правило, реальные динамические системы носят нелинейный характер, а линейные модели возникают, когда мы, исходя из некоторой совокупности априорных знаний, можем позволить себе ограничиться линейной структурой и нормальными законами распределений воздействий.

Линейные задачи оптимального оценивания и управления привлекают внимание исследователей по следующим причинам:

· возможностью простого описания и получения конструктивных эффективных методов решения;

· возможностью использования линеаризации нелинейных задач;

· управлением нелинейными системами с помощью линеаризованных моделей;

· для линейных задач удается доказать локальную и глобальную сходимость предлагаемых методов решения;

В настоящее время круг решаемых задач в таких предметных областях, как радиолокация, гидроакустика, связь, управление и т.д. значительно расширился. Причем это расширение обусловлено не только значительно выросшей теоретической базой знаний, но и быстрым ростом вычислительных возможностей современных ЭВМ. То, что еще лет десять назад казалось невозможным, сейчас может быть реализовано в реальном масштабе времени, т.е. *on-line* режиме. Известно, что наиболее удобным и распространенным средством описания стохастических динамических систем и процессов являются дифференциальные уравнения. Однако большинство из них не имеют аналитического решения и требуют разработки и применения методов вычислительной математики и численных алгоритмов.

Численное решение уравнений нелинейной фильтрации в задачах практики также невозможно, так как для этого требуется много времени и решать их необходимо каждый раз после получения результата наблюдений. Кроме того, практическое применение теории оптимальной фильтрации имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислить в реальном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Действительно, теория оптимальной фильтрации дает оптимальные оценки в каждый момент

1-2021.indd 28 29.03.2021 14:15:11

Рис.1. Общие приемы получения субоптимальных алгоритмов оценивания

t по результатам наблюдений, полученных к этому моменту, без использования последующих результатов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием, а их вычисление приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t, для оценивания состояния системы в момент t. Поэтому для статистической обработки данных после окончания наблюдений целесообразно применять другие методы. Необходимость обрабатывать результаты наблюдений в реальном масштабе времени непосредственно в процессе эксперимента привела к появлению ряда приближенных методов оптимальной фильтрации, называемых обычно методами субоптимальной фильтрации. Различные субоптимальные алгоритмы оценивания могут быть получены на основе уравнения [2, 3]. По тем же самым причинам не может быть точно решено соотношение для ковариационной матрицы ошибок. Но оно также

1-2021.indd 29 23.03.2021 14:15:12

является основой для получения приближенных уравнений, решение которых может быть получено тем или иным способом. На рис. 1 рассмотрены основные приемы получения субоптимальных алгоритмов оценивания [1–7,13].

Другие методы характеризуются упрощением исходных математических моделей с помощью линеаризации или представления функций, что позволяет использовать обобщенный фильтр Калмана, субоптимальные фильтры Стратоновича, Пугачева и др. [1–3].

Перечисленные выше методы дают принципиальную возможность получить приближение к оптимальной оценке с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок N учитываемых моментов, кумулянтам (семивариантов) или квазимоментов, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценки.

Однако число уравнений, определяющих параметры априорного распределения, быстро растет с увеличением числа учитываемых параметров (к примеру, для четырехмерного вектора состояний, число уравнений примерно пропорционально кубу числа учитываемых моментов). Вследствие этого изложенные приближенные методы решения уравнений оптимальной фильтрации практически реализуемы только при невысокой размерности расширенного вектора состояния системы, включающего все переменные состояния и неизвестные параметры. Между тем число подлежащих оцениванию неизвестных параметров во многих задачах практики оказывается больше 100. Для таких задач практически реализуем только метод нормальной аппроксимации апостериорного распределения. Однако наиболее радикальное сокращение числа уравнений для параметров апостериорного распределения дает метод эллиптической аппроксимации. Число уравнений для параметров апостериорного распределения, к которым приводит этот метод, лишь на $0.5N-1$ превышает число уравнений метода нормальной аппроксимации, практически не имея при этом ограничения на вид апостериорной вероятности.

В работах [8, 9, 11–13] рассмотрен подход, основанный на аппроксимации нелинейных функций, входящих в уравнение состояния и наблюдения, линейными сплайнами, что дает возможность проводить линейную обработку на каждом интервале и представлять нелинейный алгоритм как композицию линейных фильтров Калмана-Бьюси. При этом никаких допущений по поводу законов распределений не делается.

При этом было показано, что:

· аппроксимация стохастической нелинейной динамической системы сплайнами первого порядка является глобальной аппроксимацией;

· на каждом линейном участке система обработки может быть представлена в виде линейного фильтра Калмана-Бьюси;

· система оптимальной фильтрации представляется в виде композиции фильтров Калмана-Бьюси, имеющими характеристики согласованные с моделью системы на каждом из интервалов сплайнового представления;

· на каждом интервале сплайнового представления оцениваемый процесса является гауссовским, а на всем интервале представляется в виде сочленения гауссовских распределений, каждое из которых соответствует своему интервалу.

· компьютерное моделирование подтверждает теоретические выводы, что аппроксимация линейными сплайнами позволяет достичь выходного эффекта сколь угодно близкого к точной модели системы.

В настоящей статье будет рассмотрена модификация метода на случай, когда нелинейные функции аппроксимируются кусочно-постоянными функциями.

Существует большое количество разнообразных пространств сплайнов с различными полезными свойствами: гладкостью, качественной аппроксимацией, численной устойчивостью, неотрицательностью базисных функций, минимальной кратностью накрытия носителями функций базиса при заданном порядке аппроксимации. Некоторые пространства сплайнов обладают интерполяционным локальным базисом, определенными фильтрационными свойствами. Выбор пространства сплайнов обычно определяется типом данных и целями, которые ставятся при их обработке.

Наиболее эффективным представлением кривых является B-сплайн представление. Важно отличать сплайны от B-сплайнов. Последние являются полиномиальными функциями, а сплайны являются линейной комбинацией B-сплайнов. В литературе сплайны, обычно определяют, как композиция степенных функций малого порядка. При вычислениях удобно определять сплайны рекурсивными функциями. Для всех сплайнов стартовой точкой является неубывающая последовательность узлов $x=\{x_i\}$. B-сплайны нулевого порядка определяются уравнением:

$$B_{i,0}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x_i \le x < x_{i+1} \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}.$$

B-сплайны должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=0}^{M} B_{i,0}=1 \forall x.$$

В случае если $x_i = x_{1+1}$, то полагают $B_{i,0}=0$.

Использование сплайнов в задачах фильтрации и обнаружения сигналов в условиях шумов и помех, а также в задачах оценивания состояния систем преследуются две цели.

Первая цель – улучшение качества приближения: при одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше, чем абсолютные погрешности аппроксимации многочленами.

Вторая цель – резкое уменьшение вычислительных трудностей как при построении алгоритмов решения задач, так и при дальнейшей работе с аппроксиман-

1-2021.indd 30 29.03.2021 14:15:13

тами, которые на каждом звене представляют собой многочлены невысоких степеней или иные элементарные функции.

При одинаковых погрешностях вычислений применение сплайнов уменьшает объем вычислений. Сплайны позволяют избежать осцилляций. Для сходимости аппроксимации к аппроксимируемой функции предъявляются более слабые требования, чем в случае многочленов. Например, интерполяция сплайнами невысоких степеней сходится даже для непрерывных функций.

Достижение поставленных целей привело в настоящее время к образованию двух направлений в теории сплайнов: алгебраического и вариационного.

В первом случае сплайны трактуются как некоторые гладкие кусочно-многочленные функции с однородной структурой. Решение задач аппроксимации и изучение аппроксимативных свойств сплайнов при этом сводятся к исследованию линейных алгебраических систем. При вариационном подходе под сплайнами понимают элементы гильбертовых (или банаховых) пространств, минимизирующие определенные функционалы, а затем исследуются свойства этих решений. Преимуществом алгебраического подхода перед вариационным является простота изложения и большая близость к практическим потребностям современных методов обработки, ориентируемых на цифровые вычислительные средства. Известно [4, 5], что наиболее эффективными, с точки зрения интерполяции и аппроксимации, являются кубические сплайны и *B*-сплайны, которые широко используются в практических задачах.

Необходимо отметить, что сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации.

Сплайны обладают рядом интересных свойств:

· если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;

· сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа узлов;

· можно построить точные границы ошибок аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;

· достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики;

· использование сплайновых аппроксимаций позволяет ослабить «проклятие размерности».

Предлагаемый подход обладает большой общностью и позволяет решать сложные задачи нелинейной фильтрации-обнаружения с помощью линейных фильтров Калмана, структура которого скачкообразно меняется в зависимости от мгновенного значения оцениваемого процесса.

В настоящей статье предлагается метод фильтрации-обнаружения, основанный на аппроксимации стохастического уравнения помехи кусочно-постоянными функциями (композиция B-сплайнов нулевого порядка). Разработанные на этой основе алгоритмы обработки сигналов определяются как алгоритмы сплайн-фильтрации и сплайн-обнаружения.

Аппроксимация нелинейных стохастических систем B-сплайнами нулевого порядка

Первоначальные работы по сплайн-фильтрации ориентировались на линейные сплайны. Как было показано в работах [8–13] алгоритм линейной сплайн-фильтрации на интервале можно представить как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера секции, к которой принадлежит текущая оценка процесса. Известно, что в задачах линейной фильтрации нет необходимости вычислять плотность вероятности, достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки [8–13].

Предположим, что задана стохастическая динамическая система (ДС) уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(\mathrm{x}) + n_1(t), \\ z = x + n_0(t). \end{cases} \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

$n_0(t)$ и $n_1(t)$ – белые гауссовские шумы математическое ожидание и корреляционные функции которых, определяются выражениями:

$$\langle n_1(t)\rangle = \langle n_1(t)\rangle = 0, \ \langle n_0(t)n_0(t-\tau)\rangle = N_0\delta(\tau),$$
$$\langle n_1(t)n_1(t-\tau)\rangle = N_1\delta(\tau).$$

Первое уравнение описывает динамику состояния, а второе является уравнением наблюдения процесса.

Аппроксимируем функцию $f(.)$, входящую в уравнение состояния, на интервалах $[x_i, x_{i+1})$ кусочно-линейной функцией, определяющей сплайн первой степени S_1 класса C [4, 5]:

$$S_i = \left\{a_i(x - x_i) + b_i\right\}\Big|_{i=\overline{1\,N}}. \tag{2}$$

где: n – число интервалов аппроксимации.

$x_i \le x < x_{i+1}$, $\Delta_{-1} = \Delta_N = 0$, . n – число интервалов аппроксимации.

Введём функции прямоугольного окна $h(.)$, которую определим следующим образом.

$$h(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1 \ \textit{если} \ x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 \ \textit{если} \ x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ S_1 = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i)$$

1-2021.indd 31 23.03.2021 14:15:14

С учетом последнего, стохастическая ДС (1), у которого коэффициент сноса $f(x)$ аппроксимирован кусочно-линейными функциями, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})(a_ix+b_i)+n_1(t). \tag{3}$$

Уравнение (4) определяет марковский процесс, статистические характеристики которого полностью определяются двумя одномерными распределениями: начальной и переходной плотностями вероятности. Аналитическое выражение для них можно найти, решая соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова [3, 4, 13].

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})(a_ix+b_i)p\right]+\frac{N_0[\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})a_i^2]}{4}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{4}$$

При начальных условиях $p=\delta(x-x_1)$ решением уравнения будет:

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R(t)}}\exp\left\{\frac{[x-m_x(t)]^2}{2R(t)}\right\},\quad x_0=0,\ \ m_x(0)=0.$$

$$m_x(t)=x_0\exp\left[t\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})a_i\right].$$

$$R(t)=0.25\,\mathrm{N}_0\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})a_i\left\{1-\exp\left[2t\sum_{i=1}^{n}h(x_i,x_{i+1})a_i\right]\right\}.$$

Имитационное моделирование уравнения (4) показывает, что плотность вероятности имеет разрывы, которые являются следствием операции дифференцирования над функцией $h(x)$. Для удовлетворения требования непрерывности плотности вероятности применялась операция сглаживания высокочастотных (ВЧ) составляющих характеристической функции, путем замены ВЧ-отсчетов ($i>6$) нулями. В результате получаем значения коэффициентов:

$$a_i=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\ ;\ \ b_i=\frac{f(x_i)x_i-f(x_{i-1})x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\ . \tag{5}$$

Необходимо отметить, что аппроксимировать исходную функцию кусочно-линейной можно различными способами (к примеру, точки сопряжения отрезков прямых можно выбирать на самой функции или вне ее). С другой стороны, способ аппроксимации зависит от принятого критерия близости [5, 6].

Но для решения задачи линейной фильтрации в этом нет необходимости, так как выражение (3) позволяет на интервалах $[x_i,x_{i+1})$ рассматривать (1) как линейное стохастическое уравнение, вследствие чего алгоритм фильтрации для этого интервала представим как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера интервала Δ_i, к которому принадлежит текущая оценка процесса $x(t)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение 1-го порядка вида:

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+g(x)n_1(t),\ \ x_0=0,\ \ m_x(0)=0. \tag{6}$$

где $f(x), g(x)$ – детерминированные дифференцируемые функции.

Если проинтегрировать обе части (1), то получим после операции осреднения что коэффициент сноса будет равен [4]:

$$K_1(x)=f(x)+\frac{N_1}{2}g'(x)g(x). \tag{7}$$

Соответственно коэффициент диффузии имеет вид:

$$K_2(x)=\frac{N_1}{2}g^2(x). \tag{8}$$

В работах [3, 4] показано, что выражения (7–8) позволяют непосредственно по виду СДУ (1) выписать коэффициенты сноса и диффузии и, следовательно, составить уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФКБ) для эволюции плотности вероятности марковского процесса (1).

В случае когда $f(x), g(x)$ аппроксимируются кусочно-постоянной функцией коэффициенты сноса и диффузии для i-ой секции будут определяться выражением:

$$\begin{cases}K_{1,i}(x)=b_i\\ K_{2,i}(x)=\dfrac{N_1}{2}c_i^2\end{cases}. \tag{9}$$

Соответствующее уравнение ФПК будет иметь вид:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=-b_i\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{N_1}{4}c_i^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Решение уравнения (1) при сформулированных выше условиях записывается в виде [4]:

$$p_i(x,t)=\frac{1}{c_i\sqrt{2\pi\left(\frac{N_1}{2}\right)t}}\exp\left[-\frac{(x-b_it)^2}{2\left(\frac{N_1}{2}\right)c_i^2t}\right]. \tag{11}$$

Как видно, плотность вероятности перехода имеет вид нормального распределения с математическим ожиданием b_it и дисперсией $\left(\frac{N_1}{2}\right)c_i^2t$. С течением времени дисперсия увеличивается, причем математическое

1-2021.indd 32 29.03.2021 14:15:17

ожидание с ростом времени t равномерно смещается в ту или иную секцию в зависимости от знака коэффициента $K_{1,i}(x) = b_i$.

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_1}{2}\right)t\sum_i^N h(x_i, x_{i+1})c_i}} \exp\left[-\frac{\left(x - t\sum_i^N h(x_i, x_{i+1})b_i\right)^2}{2\left(\frac{N_1}{2}\right)t\sum h(x_i, x_{i+1})c_i^2}\right]. \quad (12)$$

Таким образом, плотность вероятности случайного процесса, у которого $f(x), g(x)$ аппроксимированы кусочно-постоянными функциями, как и в случае аппроксимации кусочно-линейными функциями, представляет собой сочленение частей нормальных плотностей вероятности, определяемых значениями $(b_i, c_i)_{i\in\overline{0\ N}}$.

Предположим, что задана стохастическая ДС уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(\mathrm{x}) + n_1(t), \\ z = x + n_0(t). \end{cases} \quad x(0) = x_0. \quad (13)$$

$n_0(t)$ и $n_1(t)$ – белые гауссовские шумы, математическое ожидание и корреляционные функции которых определяются выражениями:

$$\langle n_1(t)\rangle = \langle n_1(t)\rangle = 0, \ \langle n_0(t)n_0(t-\tau)\rangle = N_0\delta(\tau),$$

$$\langle n_1(t)n_1(t-\tau)\rangle = N_1\delta(\tau)$$

Алгоритм фильтрации на интервале, где функции $f(x)$, $g(x)$ можно представить как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера секции, к которой принадлежит текущая оценка процесса

Известно, что в задачах линейной фильтрации нет необходимости вычислять плотность вероятности, достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки [11–13].

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})b_i + \dfrac{R}{N_0}(z - \hat{x}), \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{N_1}{2} - \dfrac{R^2}{N_0}. \end{cases}$$

Так как в задачах линейной фильтрации не требуется вычислять плотность вероятности, а достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки, то можно после стандартной процедуры осреднения [3, 4, 8–10] записать уравнение оценки случайного процесса $x(t) \in \Delta_i$, задаваемого системой (13) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})b_i + \dfrac{R}{N_0}(z - \hat{x}), \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{N_1}{2} - \dfrac{R^2}{N_0}. \end{cases} \quad (14)$$

Учитывая, что на уровне математических моделей система и сигнал неразличимы, уравнения (14) могут быть использованы и при решении задач фильтрации и обнаружения сигналов [7–10,13].

Для стационарного режима, когда производная дисперсии на интервале $x \in \Delta_i$ равна нулю, можно записать соотношение:

$$\hat{\sigma}_x^2 = Rc = \sqrt{\frac{N_0 N_1}{2}} = Const, \quad x \in \Delta_i. \quad (15)$$

Если рассматривать весь интервал изменения $x \in X$, то дисперсия фильтрации случайного процесса $x(t)$ будет представляться вектором $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n)$. Таким образом, имеет место соответствие: $\{\Delta_i\} \to \{\hat{\sigma}_i^2\}$ и система уравнений (14) представляется уравнениями:

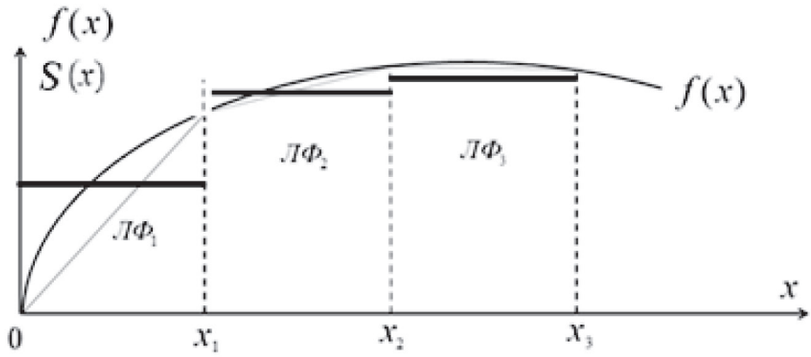

Рис. 2. Иллюстрация метода аппроксимации нелинейной функции сплайном нулевого порядка

1-2021.indd 33 29.03.2021 14:15:18

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} == \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) b_i + \dfrac{2\hat{\sigma}_x^2}{N_0}(u - \hat{x}) \\ \hat{\sigma}_x^2 = 0.5\sqrt{N_0 N_1} \end{cases} \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что в стационарном режиме дисперсия фильтрации постоянна на интервалах Δ_i и меняется при переходе к другому интервалу ступенчатым образом. При этом необходимо отметить, что на каждом интервале реализуется линейный фильтр Калмана-Бьюси. При этом дисперсия фильтрации является функцией только оценки $\hat{\sigma}_x^2(\hat{x})$. Важным фактором с вычислительной точки зрения, является то, что стационарные коэффициенты усиления $[N_0 / 2]\sigma_i^2$ могут быть рассчитаны априори и представляться в виде вектора чисел. Поэтому реализация метода фильтрации со стационарными коэффициентами требует значительно меньших объемов памяти и вычислительных затрат. Но с другой стороны, учитывая, что современная элементная база вычислительной техники непрерывно развивается, а объемы памяти возрастают, предварительный расчет и запоминание вектора функций $[N_0 / 2]\sigma_i^2(t)$ не представляет собой принципиальных сложностей.

Работа алгоритма фильтрации помехи заключается в следующем.

1. С учетом начальных значений $\hat{x}(0)$ и $\hat{\sigma}_x(0)$ и первого уравнения системы (16) находится значение оценки помехи $\hat{x}(1)$.

2. Значение оценки $\hat{x}(1)$ соотносится с системой интервалов $\{\Delta_i\}$. В результате определяются величины коэффициентов $b_i(1)$ и дисперсия $\hat{\sigma}_i^2(1)$, которые используются для определения следующей оценки $\hat{x}(2)$.

3. С приходом отсчета реализации u_1 на основании системы уравнений (16) вычисляется следующая оценка помехи $\hat{x}(2)$.

4. Полученное значение $\hat{x}(2)$ соотносится с множеством интервалов $\{\Delta_i\}$ и снова определяется тройка $\{b_i, \hat{\sigma}_i^2\}$.

5. С учетом полученных значений коэффициентов $b_i(2)$, дисперсии $\hat{\sigma}_i^2(2)$ и системы (16) находится следующее значение оценки помехи $\hat{x}(3)$.

6. Повторяются процедуры 2–5.

Так как линейная СДУ определяет гауссовскую плотность вероятности, то аппроксимация нелинейной СДУ линейным сплайном приводит к тому, что апостериорная плотность вероятности представляется в виде сплайна, «склеенного» из кусков нормальных плотностей вероятности при различных математических ожиданиях и дисперсиях (определяемых коэффициентами b_i).

Коэффициенты b_i в общем случае могут быть как положительными, так и отрицательными. Для каждого отдельного интервала Δx_i, т.е. локально, плотности вероятности будут гауссовскими, но в глобальном смысле во всей области изменения x она будет негауссовской.

Моделирование скалярной динамической системы и ее аппроксимация сплайном нулевого порядка

Для подтверждения работоспособности предложенного метода было проведено компьютерное моделирование. В качестве априорной математической модели была выбрана модель, где нелинейная функция является квадратичной, а закон взаимодействия состояния системы (сигнала) является аддитивным. Нелинейная функция задана только в уравнении состояния, а уравнение наблюдения является линейным и безынерционным.

Постановка задачи. Задана динамическая система в виде системы рекуррентных уравнений состояния и наблюдения:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - a \cdot (x_k)^2 + n1_k \\ u_k = x_k + n0_k \end{cases}, \quad (17)$$

$$k = \overline{0 \;\; N-1}, \;\; N = 32, \;\; a = 0.1, \quad x_0 = 0.$$

Шумы формирования $n1_k$ и наблюдения $n0_k$ – гауссовские с нулевым математическим ожиданием $m_0 = m_1 = 0$

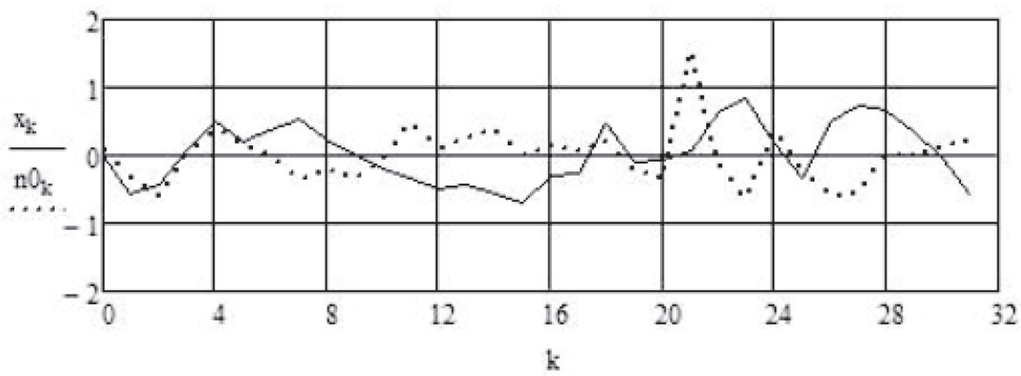

Рис. 3. Состояние системы (сигнал) x_k и шум наблюдения $n0_k$

1-2021.indd 34 23.03.2021 14:15:19

и дисперсией $\sigma_0^2 = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.35$. Входное отношение сигнал/шум равно 1.28 (по мощности).

Требуется по наблюдениям u_k в соответствии с критерием минимума среднего квадрата ошибки оценить состояние системы $\hat{x}_k$.

На рис. 3 представлен сигнал x_k и шум наблюдения $n0_k$.

Для проведения кусочно-линейной аппроксимации нелинейной функции $y1_k = a \cdot (x_k)^2$ необходимо:

· найти динамический диапазон $D = \max(y1) - \min(y1)$ изменения функции $y1_k = a \cdot (x_k)^2$;

· разбить интервал изменения функции $y1_k$ на подынтервалы $\Delta y = D / M$ (M принято 6).

На каждом подынтервале изменения функции $y1_k$ необходимо решить оптимизационную задачу следующего вида:

$$\left\{ \min E = \int_{\Delta_i} \left[a \cdot (x)^2 - f_i(x) \right]^2 dx = \int_{\Delta_i} \left[a \cdot (x)^2 - f_i \right]^2 dx, \quad f_i = Const\big|_{\Delta_i} \right\}.$$

В принципе, довольно точное решение можно получить, если брать f_i как среднее арифметическое функции $y1_k = a \cdot (x_k)^2$ на концах подынтервала Δ_i.

Аппроксимирующая функция определяется выражением вида:

$$f(i) = \begin{cases} 2.0 \ \ if \ \ -6 \le i < -4 \\ 0.8 \ \ if \ \ -4 \le i < -2 \\ 0.02 \ \ if \ \ -2 \le i < 2 \\ 0.8 \ \ if \ \ 2 \le i < 4 \\ 2.0 \ \ if \ \ 4 \le i < 6 \end{cases}.$$

На рис. 4 приведены результаты аппроксимации исходной нелинейной сплайном нулевого порядки $f(i)$.

Степень соответствия между x_k и $x1_k$ показана на рис. 5. Даже чисто визуальный анализ показывает, что аппроксимация исходной нелинейной функции вполне удовлетворительно обеспечивает представление нелинейной стохастической системы совокупностью B-сплайнов нулевого порядка.

Процесс моделирования включал в себя также процедуру оценивания состояния системы (сигнала) на фоне гауссовской помехи $x1_k$ Как было показано выше, оптимальный фильтр нелинейной системы представляет собой совокупность линейных фильтров Калмана-Бьюси на каждом подынтервале изменения функции x_k. Таким образом, уравнение оценивания в процессе моделирования представлялось в виде:

$$x2_{i+1} = x2_i - f(x_k) + K(u_k - x2_k) \qquad (18)$$

Результат моделирования процедуры оценивания представлен на рис. 6.

Как показал модельный эксперимент, оценка состояния системы (процесса, сигнала) существенно зависит не только числа подынтервалов и отношения сигнал/помеха, но и от выбора численного метода представления дифференциального уравнения и отношения сигнал/помеха. В частности, для отношения сигнал/помеха 2.84 по мощности качество оценивания представлено на рис. 7.

Из рис. 7 следует, что при увеличении ОСП качество оценивания улучшается. При моделировании использовался простейший численный метод – метод Эйлера. Использование метода модифицированного метода Эйлера позволяет значительно повысить качество оценки. Особенно это заметно при использовании «длинных» сигналов (при $N > 32$). В целом можно отметить, что компьютерное моделирование, задачей которого было показать работоспособность предлагаемого метода, подтвердило теоретические положения и продемонстрировало вполне хорошие результаты.

Фильтрация и обнаружение в случае многомерной системы

В работах [8–13] был предложен метод сплайн-фильтрации, основанный на представлении нели-

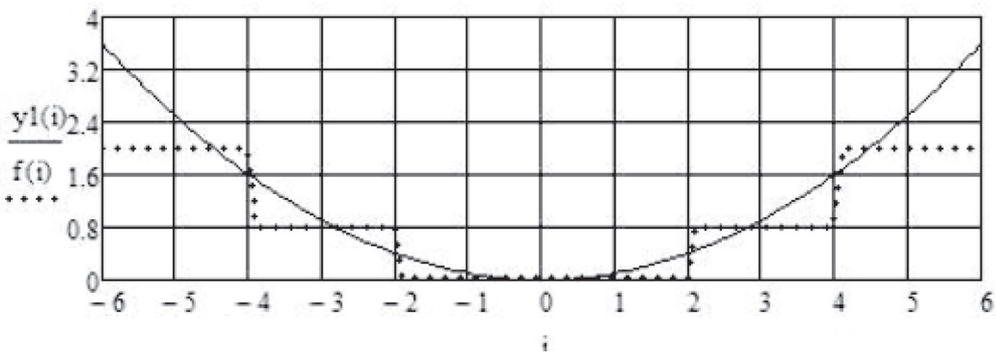

Рис. 4. Аппроксимация $y1_k$ нулевым сплайном $f(i)$

1-2021.indd 35 23.03.2021 14:15:20

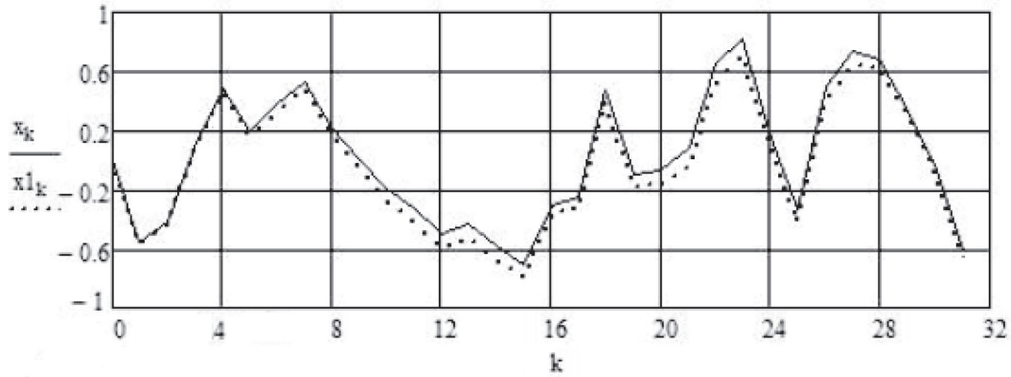

Рис. 5. Функция x_k и ее аппроксимация $x1_k$

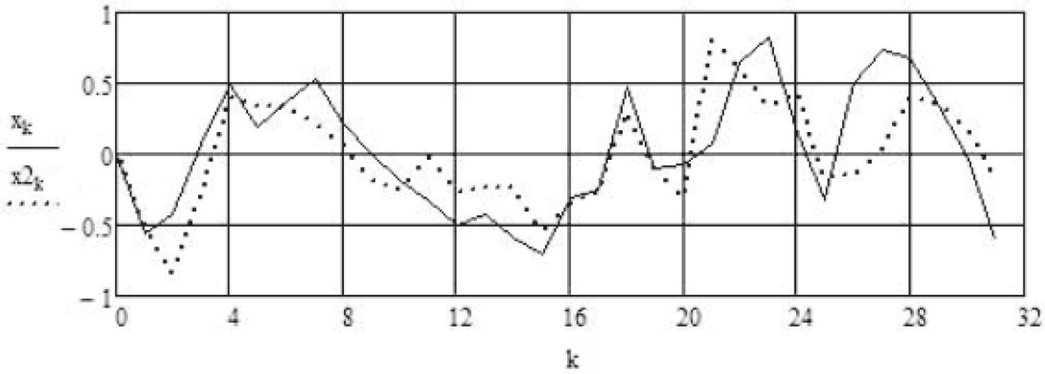

Рис. 6. Функция x_k и ее оценка $x2_k$, ОСП=1.28

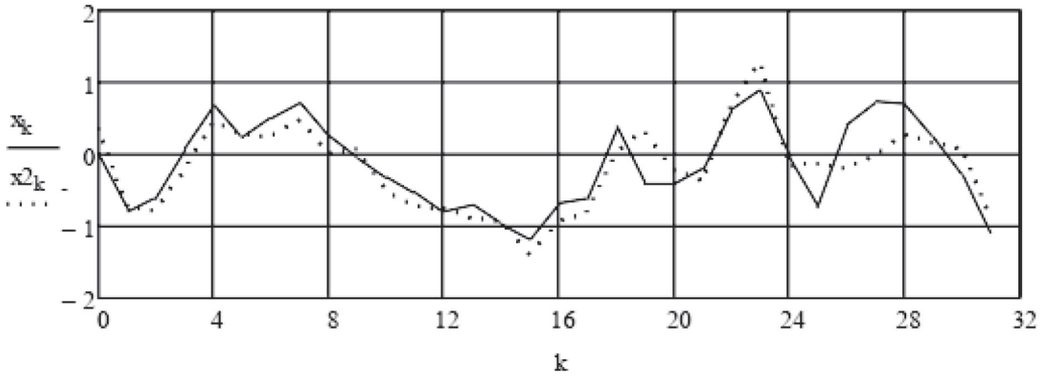

Рис. 7. Функция x_k и ее оценка $x2_k$, ОСП=2.284

1-2021.indd 36 29.03.2021 14:15:22

нейной функции сплайном 1 порядка (аппроксимация кусочно-линейными функциями).

Нелинейная стохастическая динамическая система в векторно-матричном виде представляется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t) + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z} = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t) \end{cases}, \qquad (20)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – известная функция своих аргументов. (19)

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{11}(t) & n_{12}(t) & -- & n_{1m}(t) \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} n_{01}(t) & n_{02}(t) & -- & n_{0m}(t) \end{bmatrix}^T.$$

Корреляционные функции формирующего $\mathbf{n}_1(t)$ и наблюдаемого шумов $\mathbf{n}_0(t)$ задаются выражениями:

$$\langle \mathbf{n}_1(t) \rangle = \langle \mathbf{n}_0(t) \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{n}_1(t)\mathbf{n}_1^T(t-\tau) \rangle = \mathbf{N}_1\delta(\tau), \quad \langle \mathbf{n}_0(t)\mathbf{n}_0^T(t-\tau) \rangle = \mathbf{N}_0\delta(\tau).$$

$\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1$ – симметричные матрицы двусторонних спектральных плотностей шума наблюдения и формирования размера $(m \times m)$

$$\mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} N_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{02} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{0m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{1m} \end{bmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$h_{1,i}^{kl}(x_{1,i}, x_{1,i+1}) = h_{1i}^{kl}, \; a_{1,i} = a_{1i}^{kl}, \; b_{1,i} = b_{1i}^{kl}$$

$$\left\{ \frac{dx_l}{dt} = \sum_{i=1}^{n} h_{li}^{l1}\left(a_{li}^{l1}x_1 + b_{li}^{l1}\right) + \sum_{i=1}^{n} h_{li}^{l2}\left(a_{li}^{l2}x_2 + b_{li}^{l2}\right) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \sum_{i=1}^{n} h_{li}^{lm}\left(a_{li}^{lm}x_m + b_{li}^{lm}\right) + n_l(t)\Big|_{l=\overline{1\,m}} \right\}.$$

Суммируя слагаемые в правой части последней системы, получим:

$$\left\{ \frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{li}^{lk} a_{li}^{lk} x_k + \sum_{k}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{li}^{lk} b_{li}^{lk} + n_l(t)\Big|_{l=\overline{1\,m}} \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{A}_{11}^1 = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{11} a_{1i}^{11}, \quad \mathbf{A}_{12}^1 = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{12} a_{1i}^{12}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_{1m}^1 = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{1m} a_{1i}^{1m}$$
$$\mathbf{A}_{21}^2 = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{21} a_{2i}^{21}, \quad \mathbf{A}_{22}^2 = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{22} a_{2i}^{22}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_{2m}^2 = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{2m} a_{2i}^{2m}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{A}_{m1}^m = \sum_{i=1}^{n} h_{mi}^{m1} a_{mi}^{m1}, \quad \mathbf{A}_{m2}^m = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{m2} a_{mi}^{m2}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_{1m}^m = \sum_{i=1}^{n} h_{mi}^{mm} a_{mi}^{mm}$$
$$\mathbf{B}_1 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{2k} b_{2i}^{2k}, \quad \mathbf{B}_2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{2k} b_{2i}^{2k}, \quad \dots, \quad \mathbf{B}_m = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{mi}^{mk} b_{mi}^{mk}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^1 & \mathbf{A}_{12}^1 & \dots\dots & \mathbf{A}_{1m}^1 \\ \mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{A}_{22}^2 & \dots\dots & \mathbf{A}_{2m}^2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \mathbf{A}_{m1}^m & \mathbf{A}_{m2}^m & \dots\dots & \mathbf{A}_{mm}^m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \dots \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^1 & \mathbf{A}_{12}^1 & \dots\dots & \mathbf{A}_{1m}^1 \\ \mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{A}_{22}^2 & \dots\dots & \mathbf{A}_{2m}^2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \mathbf{A}_{m1}^m & \mathbf{A}_{m2}^m & \dots\dots & \mathbf{A}_{mm}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Как показано в [8–12], в результате кусочно-линейной аппроксимации получим следующую систему уравнений задачи фильтрация-обнаружения.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t) + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z} = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{аппрок-симация}} \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z} = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t) \end{cases}$$

Система уравнений, моделирующих метод обнаружения сигнала, при условии нелинейности уравнения состояния и аппроксимации нелинейности линейными сплайнами, может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{B} + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_1) \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_0}{dt} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B} + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}_0), \;\; \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dfrac{dL}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{s} + \hat{\mathbf{x}}_-)(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) + \mathbf{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{s}^T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_+}{dt} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_+ + 2\mathbf{B} + \mathbf{K}(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_-}{dt} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_-), \;\; \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dfrac{dL}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{s} + \hat{\mathbf{x}}_-)(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) + \mathbf{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{s}^T \end{cases}.$$
$$\hat{\mathbf{x}}_+ = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_0, \;\; \hat{\mathbf{x}}_- = \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_0, \qquad (21)$$

$\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_0$ – оценка помехи, соответственно при наличии сигнала и его отсутствии;

L – отношение правдоподобия.

В формуле (21) представлено два варианта ФКБ с

1-2021.indd 37 29.03.2021 14:15:23

переменными параметрами. Первый реализует классический вариант ФКБ.

При кусочно-линейной аппроксимации реализация фильтра Калмана-Бьюси при решении задачи обнаружения вычислительные затраты по умножению (положим для простоты $n = m$) включают в себя:

Первые два уравнения: $\sim\left(2n^2 + 2n^3\right)$.

Третье уравнение: $\sim 3n^3$.

Четвертое уравнение: $\sim n^2$.

В целом общие вычислительные затраты VZ будут примерно равны:

$$VZ \approx 5n^3 + 3n^2.$$

Таким образом, увеличение размерности системы приводит к резкому возрастанию вычислительных затрат.

В настоящей статье предлагается, как было показано выше, использовать вместо сплайнов 1-го порядка использовать сплайны 0-го порядка (кусочно-постоянная аппроксимация). В этом случае матрица будет нулевой $\mathbf{A} = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t) + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z} = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{аппроксимация}} \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{B} + \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{z} = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t). \end{cases}$$

Уравнение оценивания состояния ДС для (21) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} = \mathbf{B} + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_1) \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_0}{dt} = \mathbf{B} + \mathbf{K}\left(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}_0\right), \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dfrac{dL}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{s} + \hat{\mathbf{x}}_-)(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) + \mathbf{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{s}^T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_+}{dt} = 2\mathbf{B} + \mathbf{K}(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_-}{dt} = \mathbf{K}\left(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_-\right), \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dfrac{dL}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{s} + \hat{\mathbf{x}}_-)(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) + \mathbf{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{s}^T \end{cases}$$

$\mathbf{B}$, $\mathbf{z}$ – вектор-столбцы $(m \times 1)$;

$\mathbf{K}$ – матричный коэффициент усиления $(m \times m)$;

$\mathbf{R}$ – корреляционная матрица ошибок фильтрации $(m \times m)$.

Из последней системы уравнений следует, что уменьшается как минимум на порядок, так как в уравнениях оценки отсутствуют умножения матриц, которые требуют n^3. Следовательно, общее число вычислительных затрат составит $\sim 3n^2$. При этом надо отметить, что коэффициент усиления $\mathbf{K}$ и вектор $\mathbf{B}$ вычисляются заранее и могут храниться в памяти. При попадании оценки $\hat{\mathbf{x}}_1$ и $\hat{\mathbf{x}}_0$ в соответствующий подынтервал работает ФКБ с соответствующими данному интервалами коэффициентами. Таким образом, как и в случае аппроксимации нелинейной функции сплайном 1-го порядка (дефекта 0) структура оптимального нелинейного фильтра представляется как ФКБ с переменными параметрами (рис. 8).

Выводы

1. Аппроксимация стохастической нелинейной динамической системы кусочно-постоянными функциями является глобальной аппроксимацией, позволяющей сохранить все особенности, присущие исходной динамической системы.

2. Предложенный метод позволяет больше чем на порядок сократить вычислительные затраты по сравнению с аппроксимацией нелинейностей кусочно-линейными функциями.

3. На каждом линейном участке система обработки может быть представлена в виде линейного фильтра Калмана-Бьюси. При этом будут соблюдаться все условия его применимости, а именно, модель шума в виде гауссовского процесса и линейность самой системы относительно ее состояния.

4. В целом система обработки представляется в виде композиции фильтров Калмана-Бьюси, имеющих характеристики, согласованные с моделью системы на каждом из интервалов сплайнового представления.

5. Плотность вероятности оцениваемого процесса представляется в виде сочленения различных гауссовских распределений, каждое из которых соответствует своему интервалу.

6. Компьютерное моделирование подтверждает теоретические выводы, что аппроксимация кусочно-постоянными функциями позволяет достичь выходного эффекта достаточно близкого к точной модели системы.

7. Предложенный подход может быть применен в задачах обнаружения и фильтрации сигналов в условиях помех и шумов с различными законами распределений.

Литература

1. Рыбаков, К. А. Решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации как задачи анализа систем со случайными обрывами и ветвлениями траекторий / К.А. Рыбаков // Материалы конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: актуальные проблемы», 2012. – С. 38–42.

2. Красовский, А. А. Справочник по теории автоматического управления / А.А. Красовский. – М.: Наука, 1987. – 711 с.

1-2021.indd 38 23.03.2021 14:15:24

3. Тихонов, В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

4. Казаков, В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи / В.А. Казаков. – М.: Сов. радио, 1973. – 232 с.

5. Бурова, И. Г. Теория минимальных сплайнов / И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович. – СПб.: СПбГУ, 2000. – 316 с.

6. Завьялов, Ю. С. Метод сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.Н. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

7. Розов, А. К. Нелинейная фильтрация сигналов / А.К. Розов. – СПб.: Политехника, 1994. – 381 с.

8. Бутырский, Е. Ю. Аппроксимация многомерных функций / Е.Ю. Бутырский // Информация и Космос. – 2006. – № 4. – С. 38–49.

9. Бутырский, Е. Ю. Основы теории сплайн-фильтрации сигналов / Е.Ю. Бутырский // Информация и Космос. – 2010. – № 1. – С. 34–39.

10. Бутырский, Е. Ю. Обнаружение сигналов на фоне марковской реверберационной помехи / Е.Ю. Бутырский // Научное приборостроение. – 2012. – Т. 22, № 3. – С. 87–95.

11. Бутырский, Е. Ю. Сплайн модели сигналов и сплайн фильтрация / Е.Ю. Бутырский // Национальная безопасность и стратегическое планирование. – 2014. – № 2 (6). – С. 43–56.

12. Бутырский, Е. Ю. Линейная сплайн-интерполяция в задаче обнаружения сигналов / Е.Ю. Бутырский, В.В. Васильев, К.И. Понкратова // Информация и Космос. – 2017. – № 3. – С. 48–54.

13. Бутырский, Е. Ю. Методы моделирования и оценивания случайных величин и процессов / Е.Ю. Бутырский. – СПб.: Стратегия Будущего, 2020. – 642 с.

1-2021.indd 39 29.03.2021 14:15:24