Математическое моделирование свойств восстанавливаемой измерительной системы

Recoverable measuring system math modeling

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА имени А. Ф. Можайского),
профессор кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Литвиненко / Litvinenko S.
Сергей Федорович
(Litvinenko.S.F@yandex.ru)
кандидат технических наук, доцент.
ВКА им. А. Ф. Можайского,
доцент кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Усиков / Usikov V.
Валентин Дмитриевич
(usikov_1989@list.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: измерительная система – measuring system; уравнение Вольтерра – Volterr equation; межповерочный интервал – calibration interval; частота отказов – failure rate; коэффициент готовности – availability factor.

В работе предлагается способ исследования свойств измерительной системы с помощью математического моделирования на основе классического интегрального уравнения Вольтерра из теории надежности, что позволяет выявить зависимость длительности межповерочного интервала измерительной системы и коэффициента готовности. Проведенное исследование позволяет детально изучить ряд вопросов, связанных с контролем измерительной системы при её проектировании и эксплуатации.

The paper proposes a method for investigating the properties of a measuring system using mathematical modeling based on the classical Volterra integral equation from the theory of reliability, which makes it possible to reveal the dependence of the duration of the calibration interval of the measuring system and the availability factor. The conducted research allows you to study in detail the issues related to the control of the measuring system during its design.

Введение

Развитие измерительных систем (ИС) тесно связано с необходимостью совершенствования методов и подходов метрологического обслуживания сложных технических систем. Под ИС в [1] понимают совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей, электронно-вычислительной машины и других технических средств, размещенных в разных точках контролируемого объекта с целью измерений одной или несколько физических величин, свойственных этому объекту, и выработки измерительных сигналов в разных цепях. Поддержание метрологической исправности ИС добивается проведением периодической поверки средств измерений (СИ), входящих в состав ИС.

При обеспечении ведомственной поверки в заранее определённых метрологических подразделениях отсутствие метрологических отказов проверяемых СИ напрямую определяет работоспособность и надёжность технических систем, решающих целевые задачи. Таким образом, рабочие эталоны, обеспечивающие передачу размера величины в замкнутой системе,

4-2020.indd 40 24.12.2020 16:48:39

не только обеспечивают метрологические характеристики ведомственных СИ, но и влияют на эксплуатационно-технические характеристики (ЭТХ) техники, решающей целевые задачи [2].

К числу ЭТХ технических систем, решающих целевые задачи, относится готовность, которую в ряде оптимизационных задач выбирают целевой функцией. В качестве показателя готовности в случае, когда необходимо оценить приспособленность технической системы к переводу из любого состояния в состояние непосредственного применения по назначению, как правило, выбирают коэффициент готовности системы [3]. В данной статье коэффициент готовности рассматривается как частный стационарный показатель, ввиду того что часто не принимают во внимание его изменчивость в процессе эксплуатации [4] и зависимость для составляющих систему подсистем. Это сильно ограничивает объективность приводимых результатов исследований.

Целью данной работы является распространение и адаптация известных результатов исследований из теории надёжности и теории восстановления к исследованиям в области метрологии, а также демонстрация их полезности и пригодности в этой науке. На наш взгляд, они также позволят получить и ряд новых результатов в теории названных здесь научных дисциплин.

Классическое интегральное уравнение Вольтерра из теории надёжности для исследования простейших свойств измерительных систем

Обратимся к статье [5] и несколько изменим её направленность, а в дальнейшем изложении будем опираться на статьи [6, 7] и книгу [8]. В статье [9] сделана попытка связать межповерочный интервал с коэффициентом готовности и характеристиками СИ на основе изучения средней частоты его отказов при наличии поверок. Эта модель затем была использована для построения модели ИС.

Примем следующие обозначения: $\omega(t)$ – средняя частота утраты работоспособности – пригодности ИС; $a(t)$ – плотность вероятности времени до потери работоспособности ИС; $Q(t)$, $P(t)$ – вероятность утраты и неутраты работоспособности ИС за время t; $U(t)$ – функция распределения времени между соседними поверками ИС; $g(t)$ – плотность вероятности времени восстановления работоспособности ИС.

Допустим, что проведена предварительная поверка ИС и её параметры приведены в норму. При этом условии в использовании ИС возможны следующие несовместимые гипотезы для определения средней частоты нарушения работоспособности:

– произошел ровно один метрологический отказ ИС за время t, при условии, что поверка не была проведена;

– произошло несколько метрологических отказов ИС за время t, при условии, что первый метрологический отказ ИС наступил до момента проведения первой поверки;

– произошло несколько метрологических отказов ИС за время t, при условии, что первая поверка ИС была проведена до момента возникновения первого отказа.

Тогда выражение для средней частоты потерь работоспособности ИС примет следующий вид:

$$\omega(t) = a(t)[1-U(t)] + \int_0^t [1-U(\tau)]a(\tau)\omega(t-\tau)d\tau + \int_0^t [1-Q(\tau)] \int_0^{t-\tau} A(\theta)\omega(t-\tau-\theta)d\theta dU(\tau) \quad , \tag{1}$$

$$\nu_A(\theta) = \int_0^\theta \nu_p(z)\nu_r(\theta-z)dz . \tag{2}$$

Выражение (2) означает, что плотность времени восстановления рассматривается как сумма случайных величин длительностей двух фаз: первой фазы – фазы определения, находятся ли метрологические характеристики ИС в допуске, и второй фазы устранения всех нарушений, определённых за время выполнения первой фазы. Именно суммарная продолжительность времени этих двух фаз и определяет наше понимание поверки ИС. В дальнейшем за пределами данной статьи плотности фазы времени поверки ν_p ИС и плотности фазы устранения нарушений $\nu_r(t)$ следует рассматривать более строго, считать их зависимыми и в необходимом случае даже численно оснащёнными значениями параметров контроля. Здесь же, в данной статье, пока ограничимся выражением (2).

Представим (1) и (2) в изображении Лапласа.

$$\omega^*(s) = \frac{a^*(s)}{1-a^*(s)-b^*(s)\nu_A^*(s)}, \tag{3}$$

где

$$a^*(s) = \int_0^\infty a(z)[1-U(z)]e^{-sz}dz,\ b^*(s) = \int_0^\infty [1-Q(z)]e^{-sz}dU(z), \tag{4}$$

$$\nu_A^*(s) = \nu_p^*(s)\nu_r^*(s).$$

На практике поверка ИС проводится регулярно, поэтому имеет смысл рассматривать в качестве $U(t)$ вырожденное распределение, то есть

$$U(t) = \begin{cases} 0, t < T \\ 1, t \geq T \end{cases} \tag{6}$$

где T – период между соседними поверками.

Из выражения (2) при условии длительного использования ИС и с учетом (3) получаем установившееся значение средней частоты нарушения работоспособности ИС:

4-2020.indd 41 24.12.2020 16:48:40

$$\omega^*(T) = \frac{Q(T)}{\int_0^T P(z)dz + v_A P(T)}, \qquad (7)$$

где v_A – средняя продолжительность одной поверки ИС.

Рассуждая аналогично, получим $\omega_g(t)$, $\omega_g^*(t)$, $\omega_g(\infty,T)$ для случая, когда восстановление ИС производят не мгновенно после установления её неработоспособности, а спустя случайное время задержки:

$$\omega_g(t) = a(t)[1-U(t)] + \int_0^t [1-U(\tau)] \int_0^{t-\tau} g(\theta)\omega_g(t-\tau-\theta)a(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t [1-Q(\tau)] \int_0^{t-\tau} v_A(\theta)\omega_g(t-\tau-\theta)d\theta dU(\tau) \ ; \qquad (8)$$

$$\omega_g^* = \frac{a^*(s)}{1-a^*(s)v_A^*(s)-b^*(s)g^*(s)};$$

$$\omega(\infty,T) = \frac{Q(T)}{\int_0^t P(z)dz + gQ(T) + v_A P(T)}, \qquad (9)$$

где g – среднее время задержки на восстановление процесса;

v – среднее время продолжительности поверки.

Из (7) и (9) при условии, что поверка не проводится $(T \to \infty)$, следуют частные случаи стационарной средней частоты $\omega(\infty,\infty) = \frac{1}{v_A}$, $\omega(\infty,\infty) = \frac{1}{(v_A+g)}$ где v_A – среднее время безотказной работы ИС, а g – среднее время задержки альтернирующего процесса при разрушении ИС.

Пример 1. Требуется определить оптимальную по коэффициенту готовности продолжительность периода между поверками T_0 и среднее число поверок ИС за один год, если распределение времени работы ИС подчиняется закону экстремальных значений – закону Вейбулла $P(t) = e^{-\lambda_0 t^k}$ с параметрами $\lambda_0 = 1 \cdot 10^{-5} 1/ч^k$, $k = 2,5$. Среднее время ремонта ИС после полной потери работоспособности (случайная задержка) равно $g = 10$ часов, а среднее время полной поверки ИС равно $v_A = 2$ часа.

Пользуясь той же методикой, по которой определялась средняя частота, найдём выражение для коэффициента готовности ИС по формуле:

$$K_Г = \lim_{t\to\infty} K_Г(t,T) = \frac{\int_0^T P(z)dz}{\int_0^T P(z)dz + gQ(T) + v_A P(t)}. \qquad (10)$$

Величина T_0, машинизирующая (10), удовлетворяет уравнению:

$$\frac{g}{g-v_A} = \lambda(T_0)\int_0^{T_0} P(z)dz + P(T_0), \qquad (11)$$

в котором $\lambda(t)$ – интенсивность отказов ИС будет равна $\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}$.

Результаты расчётов по формулам (9) и (10) приведены на рис. 1. Максимальная величина $K_Г = 0,95$ достигается при $T_0 \approx 50ч$. Межповерочному периоду $T_0 \approx 50ч$ соответствует средняя частота проведения поверки $\omega(\infty,T_0) \approx 0,0035$ 1/ч. Среднее время безотказной работы

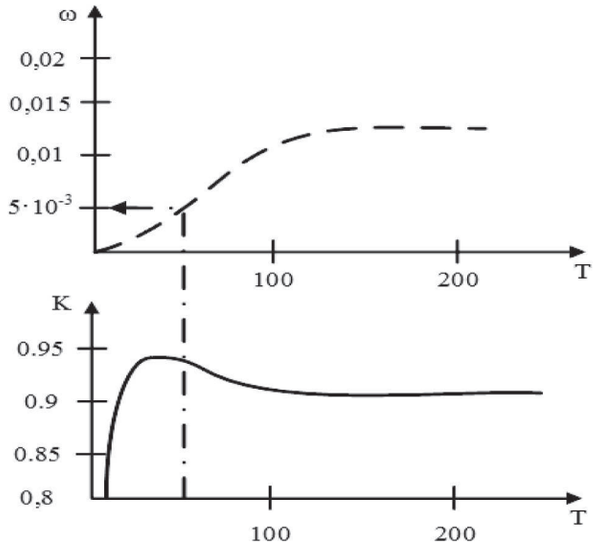

Рис. 1. Зависимость длительности межповерочного интервала ИС от средней частота поверки и коэффициента готовности

4-2020.indd 42 24.12.2020 16:48:41

ИС без проведения поверки $T_{cp} \approx 89ч$, а с их проведением $T_{cp} \approx 285ч$. Среднее ожидаемое число ремонтов ИС в течение одного года без проведения поверки $n_p \approx 100$, а с их проведением – $n_p \approx 31$. Итоговая суммарная наработка ИС в течение года увеличивается в среднем на полмесяца.

Резюмируя по математической модели исследования свойств ИС, необходимо отметить:

1. Рассмотрена наиболее простая математическая модель на основе интегрального уравнения Вольтерра второго вида с разностным ядром.

2. Она справедлива при условии полного обновления элементов ИС после её поверки и полного обновления после метрологического отказа в регенерирующем случайном процессе.

3. Контроль за состояниями ИС принят идеальный, единичный.

4. Впервые предложено рассматривать процесс поверки ИС двухфазным. Это открывает возможность исследовать в дальнейшем ИС с применением более сложных моделей (многофазных, немарковских, не только с последовательными, но и параллельными фазами, с частичным восстановлением в фазах, распределённым контролем в них, и с произвольной достверностью).

5. Предыдущий пункт может быть развит с учётом введения понятий риска, выигрыша или ущерба для отдельных или противодействующих сторон при достижении ими своих целей.

6. В связи с изложенным могут быть построены новые модели анализа и синтеза ИС.

Классическое интегральное уравнение для средней частоты событий при условии сохранения только работоспособности измерительной системы

В работе [10] теоретически было доказано, что если восстанавливаемый элемент ИС заменяется после отказа аналогичным элементом отказавшему, при условии, что заменяющий элемент проработал такое же время, что и отказавший, но оказался исправным, работоспособным, то интегральное уравнение для средней частоты отказов представляется в виде:

$$\omega_2(t) = a(t)(1 + \int_0^t \frac{\omega_2(z)}{P(z)} dz), \qquad (12)$$

где $\omega_2(t)$ – средняя частота отказов второго вида в отличие от (1) – $\omega(t)$, которую в дальнейшем будем обозначать как $\omega_1(t) = \omega(t)$. Среднюю частоту (12) будем называть средней частотой второго вида в отличие от (1) – $\omega_1(t)$ – частоты первого вида. Обе частоты $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ подтверждены экспериментально [10].

Нетрудно показать, что уравнение (12) имеет единственное аналитическое решение $\omega_2(t) = \lambda(t)$, где $\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}$, то есть является интенсивностью отказа элемента ИС. С физической точки зрения применительно к ИС это означает, что отказавший элемент ИС при идеальном контроле отказа мгновенно заменяется работоспособным, который, проработав такое же время, что и отказавший, остался исправным. Практически этот случай замены элементов ИС является самым невыгодным. Поэтому рассматривать для этого случая различные интегральные уравнения пока не имеет смысла. Ситуация становится ещё хуже, если контроль состояния ИС не идеальный.

Классическое общее интегральное уравнение для средней частоты событий, из которого следуют как частные случаи ранее рассмотренные средние частоты

Классическое общее интегральное уравнение для средней частоты событий позволяет более объективно и, следовательно, более точно оценивать качество восстанавливаемых ИС, работающих в более сложных режимах эксплуатации. Остановимся подробнее на выводе выражения для данной средней частоты [11].

Оба допущения о состоянии ИС к моменту её использования по назначению являются крайними. При их принятии строятся модели двух средних частот оценивания качества ИС. Они могут служить для нахождения верхней и нижней границ оценок качества ИС. Однако при длительной эксплуатации эти границы весьма широки и, следовательно, точность оценивания качества ИС будет низкой. Поэтому предложено выражение для средней частоты отказов третьего вида $\omega_3(t)$. Пусть основной элемент измерительной системы находится в режиме работы ε, а запасной элемент ИС в режиме ε_p. Запишем выражение для условной вероятности безотказной работы восстановленного (заменённого) элемента ИС в течение времени $t - \tau$ в режиме ε при условии, что до замены элемент находился в режиме ε_p в течение времени τ и не отказал. Будем иметь

$$P_B(t - \tau, \varepsilon \,|\, \tau, \varepsilon_p) = P(t - \tau + x(\tau), \varepsilon) / P(x(\tau), \varepsilon) . \qquad (13)$$

В этом выражении $x(\tau)$ означает время работы элемента ИС в режиме ε, эквивалентное времени его работы τ в режиме ε_p при условии, что израсходованные ими ресурсы в этих режимах одинаковы. Следует отметить, что выражение (13) справедливо только в том случае, если надёжность элементов замены после постановки их в режим ε не зависит от того, каким образом был израсходован их ресурс, а зависит только от величины израсходованного ресурса в прошлом. Физически это означает, что в структуре материалов элементов ИС не происходит качественных изменений свойств при работе в режимах ε и ε_p.

Найдём условную плотность вероятности распределения времени работы элемента до отказа, продифференцировав по переменной t выражение (13):

4-2020.indd 43 24.12.2020 16:48:42

$$a_B(t-\tau,\varepsilon\,|\,\tau,\,\varepsilon_p) = a(t-\tau+x(\tau),\varepsilon\,)\,/\,P(x(\tau),\varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Тогда зависимость между средней частотой отказов $\omega_3(t)$ и плотностью вероятности $a(t)$ будет представлена следующим интегральным уравнением:

$$\omega_3(t) = a(t) + \int_0^t \frac{a(t-\tau+x(\tau),\varepsilon)}{P(x(\tau),\varepsilon)}\omega_3(\tau)d\tau\,. \qquad (15)$$

Рассмотрим частные случаи, следующие из (15).

а) Замена отказавших элементов производится новыми элементами. Тогда $x(\tau)=0$, $P(x(\tau)=1$. Поэтому из (15) следует:

$$\omega_1(t) = a(t) + \int_0^t a(t-\tau)\,\omega(\tau)d\tau\,. \qquad (16)$$

б) Замена отказавших элементов производится старыми элементами, выработавшими такой же ресурс надёжности, что и основные элементы, но исправными. В этом случае $x(\tau)=\tau$, $P(x(\tau))=P(\tau)$. Поэтому из (15) следует интегральное уравнение:

$$\omega_2(t) = a(t)[1+\int_0^t \frac{\omega_2(\tau)}{P(\tau)}d\tau]\,. \qquad (17)$$

В (16) и (17) символ нагрузки ε опущен.

Нетрудно показать, что если замена отказавших элементов производится не мгновенно, а через случайное время, то будет иметь место следующее выражение для средней частоты отказов:

$$\omega_3(t) = a(t) + \int_0^t \omega_3(\tau)\int_0^{t-\tau} \frac{g(\theta)a(t-\tau-\theta+x(\tau+\theta))}{P(x(\tau+\theta))}d\theta d\tau\,, \qquad (18)$$

в котором $g(t)$ – плотность вероятности времени замены. Из (18) следуют известные ранее уравнения для средних частот отказов при мгновенной замене, если принимать во внимание соответствующие условия, воздействующие на элементы до включения их в систему.

В заключение статьи мы рассмотрим простой пример, позволяющий получить аналитическое решение в конечном виде для $\omega_3(t)$ с помощью выражения (15).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда распределение времени жизни элементов в основном режиме подчинено равномерному закону распределения, а распределение времени элементов замены экспоненциальному:

$$\begin{cases} a = \text{const},\ 0 \le t < 1/a, \\ 0, \qquad\qquad t \ge 1/a. \end{cases}$$

$$a(t,\varepsilon_p) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (0 < t < \infty)\,. \qquad (19)$$

Дифференцируя (15) по t, получим

$$\dot\omega_3(t) = \dot a(t) + \lambda(x(t))\,\omega_3(t) + \int_0^t \frac{\dot a(t-\tau+x(\tau))}{P(x(\tau))}\omega_3(\tau)d\tau\,,$$

где $\lambda(t) = a(t)\,/\,P(t)$ – интенсивность отказа, и учитывая, что $\dot a(t)=0$, будем иметь

$$\dot\omega_3 = \lambda(x(t))\,\omega_3(t)\,. \qquad (20)$$

В соответствии с (14), приняв $\omega_3(0)=a(0)=a$, получим выражение для

$$\omega_3(t) = a\exp(\int_0^t \lambda(x(z))dz\,. \qquad (21)$$

Величину $x(t)$ найдём из условия равенства ресурсов в соответствии с физическим принципом профессора Н. М. Седякина [12] (может быть использован и другой принцип):

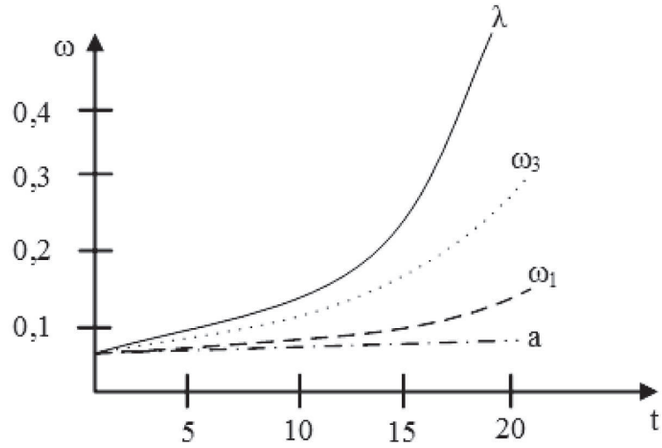

Рис. 2. Графики функций $a(t)$, $\lambda(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_3(t)$ на интервале $0 \le t < 1/a$.

4-2020.indd 44 24.12.2020 16:48:44

$$\int_0^{x(t)} \lambda(z,\varepsilon)dz = \int_0^t \lambda(z,\varepsilon_p)dz\,. \qquad (22)$$

Интенсивности отказов $\lambda(t,\varepsilon)$, $\lambda(t,\varepsilon_p)$, в соответствии с (19) будут равны

$$\lambda(t,\varepsilon) = a/(1-at), \quad \lambda(t,\varepsilon_p) = \lambda\,. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (22), найдём

$$x(t) = (1-e^{-\lambda t})/a\,. \qquad (24)$$

Заменяя t на $x(t)$ в первом выражении (23), получим

$$\lambda(x(t)) = a\,e^{\lambda t}\,. \qquad (25)$$

Подставляя (25) в (21), окончательно будем иметь выражение для искомой средней частоты отказов

$$\omega_3(t) = a\exp[a(e^{\lambda t}-1)/\lambda]. \qquad (26)$$

В частном случае замены отказавших элементов новыми из (26) следует выражение для $\omega_1(t)$ из [12]: $\omega_3(t) = \omega_1(t) = a\,e^{at}$. На рис. 2 приведены графики функций $a(t)$, $\lambda(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_3(t)$ на интервале $0 \le t < 1/a$. Предельное значение для $\omega_1(t)$, равное $2a$ в силу разрыва функции $a(t)$, и изменение $\omega_1(t)$ при $t > 1/a$ не показаны. При численных расчётах приняты значения параметров $a = \lambda = 0.05\,h^{-1}$.

$$\lambda(t) = \frac{0.05}{1-0.05t}\;\; \omega_3(t) = 0.05\cdot\exp\left[0.05\cdot\frac{e^{0.05}-1}{0.05}\right],$$

$$\omega_1(t) = 0.05\cdot e^{0.05\cdot t},\; a(t) = 0.05\,. \qquad (27)$$

При этих значениях получены выражения для изображения графиков, приведенных на рис. 2.

Данный пример лишь показывает возможность решения уравнения (15) в конечном виде. В более общем случае для решения уравнения следует пользоваться либо приближёнными методами, либо численными с использованием вычислительных средств.

Заключение

Математическое моделирование свойств измерительной системы является необходимым этапом её проектирования. Построение адекватной модели измерительной системы позволяет существенно снизить стоимость разработки сложной измерительной системы и повысить её надежность, предотвратив на ранней стадии проектирования ряд технических недостатков. Также необходимо отметить, что математическое моделирование частоты и интенсивности отказов измерительной системы позволяет установить квазиоптимальный межповерочный интервал и объём запасных частей, инструментов и принадлежностей. Всё вышесказанное свидетельствует о важности и актуальности построения математических моделей как для измерительных систем в целом, так и для их отдельных свойств.

Литература

1. ГОСТ 8.673–2009. Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Датчики интеллектуальные и системы измерительные интеллектуальные. Основные термины и определения. – Введ. 2009–12–15. – М.: Стандартинформ, 2010. – 8 с.

2. Дорохов, А. Н. Выбор оптимального по критерию готовности интервала между аттестациями эталона / А.Н. Дорохов, А.П. Гончаров // Информация и Космос. – 2019. – № 3. – С. 89–92.

3. ГОСТ 27.002–2015. Надёжность в технике (ССНТ). Термины и определения. – Введ. 2017–03–01. – М.: Стандартинформ, 2016. – 24 с.

4. Метрология: Учебник / А.Н. Кравцов [и др.]. – СПб.: ВКА имени А. Ф. Можайского, 2019. – 313с.

5. Смолицкий, Х. Л. Об одной количественной характеристике надёжности / Х.Л. Смолицкий, П.А. Чукреев // Радиотехника. – 1960. – Т. 15, № 8. – С. 40–49.

6. Смагин, В. А. Средняя частота отказов аппаратуры при ненадёжных элементах замены / В.А. Смагин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 3. – С. 118–120.

7. О надёжности дублированной системы с восстановлением и профилактическим обслуживанием / Б.В. Гнеденко [и др.] // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 1. – С. 66–71.

8. Барзилович, Е. Ю. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем / Е.Ю. Барзилович, В.А. Каштанов. – М.: Советское Радио, 1971. – 271 с.

9. Новиков, А. Н. Определение межповерочных интервалов средств измерений на основе расчёта средней частоты метрологических отказов с учётом заданного коэффициента готовности / А.Н. Новиков, В.А. Смагин, А.П. Гончаров // Известия Тульского ГУ. Технические науки. – 2019. – Вып. 6. – С. 42–46.

10. Зайнашев, Н. К. О двух допущениях при оценке надёжности восстанавливаемых технических систем / Н.К. Зайнашев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1971. – № 5. – С. 73–78.

11. Смагин, В. А. Средняя частота отказов аппаратуры при ненадёжных элементах замены / В.А. Смагин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – №3. – С. 118–120.

12. Седякин, Н. М. Об одном физическом принципе теории надёжности и некоторых его приложениях / Н.М. Седякин. – Л.: ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1965. – 41 с.

4-2020.indd 45 24.12.2020 16:48:45