Метод последовательных приближений для функции распределения времени ожидания обслуживания заявки в системе массового обслуживания, описываемой интегральным уравнением Винера-Хопфа

Successive approximation method for function of delay-in-queue distribution of request in queuing system, described by integral Wiener-Hopf equation

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Литвиненко / Litvinenko S.
Сергей Фёдорович
(litvinenko.s.f@yandex.ru)
кандидат технических наук, доцент,
почетный работник высшего профессионального образования РФ.
ВКА им. А. Ф. Можайского.
г. Санкт-Петербург

Микляев / Miklyaev D.
Дмитрий Сергеевич
(joke_m@mail.ru)
Главный научный метрологический центр МО РФ,
инженер.
г. Москва

Ключевые слова: одноканальная система массового обслуживания – single-channel queue; функция распределения времени ожидания – delay-in-queue distribution function; приближение – approximation; требования – requirements; произвольные распределения времени между требованиями и обслуживанием – arbitrary time distribution between the requirements and service; гладкие распределения – smooth distributions; разрывные распределения – discontinuous distributions.

Предлагается метод последовательных приближений для определения функции распределения времени ожидания обслуживания требований в одноканальной системе массового обслуживания при произвольных гладких и разрывных плотностях вероятностей времени между поступающими требованиями и длительностями их обслуживания.

Successive approximation method is proposed for the function of delay-in-queue distribution of request in a single-channel queuing system in case of smooth and discontinuous probability densities of time between the requests received and durations of their servicing.

Введение

В книге [1] автором было предложено решение задачи о распределении максимума на примере системы массового обслуживания для одноканальной системы с произвольными распределениями длительностей времени между поступающими заявками и длительностей их обслуживания вида $G/G/1$. Основное рекуррентное соотношение для данной СМО принимает вид

$$w_{n+1} = \max[0, w_n + u_n], \tag{1}$$

где w_n+1 – время ожидания обслуживания поступающего требования в систему с номером $n+1$, а $u_n=x_n - t_n$ – разность между временем обслуживания n-го требования и промежутком времени между моментами поступления n-го и $n+1$-го требований. Обе случайные величины x_n и t_n независимы от номера n и друг от друга и распределены с плотностями вероятностей $b(t)$ и $a(t)$, а их разность распределена с плотностью вероятности:

4 2019 □□□□□□.indd 73 25.12.2019 11:52:20

$$c(t)=\int_0^\infty b(t+u)a(u)du. \qquad (2)$$

Определяемая функция распределения времени ожидания требования в системе при условии, что существует её стационарный предел, представляется уравнением:

$$W(t)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{t} W(t-u)c(u)du, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \qquad (3)$$

В книге [1] обсуждались способы преодоления трудностей при изучении системы $G/G/1$ путём построения приближений и границ для точных решений. Одним из них обсуждалось довольно грубое дискретное приближение. Идея этого подхода состояла в изменении входных распределений $A(t)$ и $B(t)$ таким образом, чтобы основное рекуррентное соотношение (1) позволяло получать прямое аналитическое решение для распределения времени ожидания. Итеративное решение этого уравнения достаточно просто, когда обе входные случайные величины представляются дискретными случайными величинами. Они принимают в моменты времени $k\tau$ $(k=0,1,2,\ldots$, с единицей отсчёта времени τ) только ненулевые значения. Тогда можно записать предел рекуррентной процедуры и получить систему линейных разностных уравнений, которая может быть решена методом z-преобразований и получено точное распределение времени ожидания. Но если случайные величины непрерывные, то возникает задача: как непрерывные случайные величины аппроксимировать дискретными таким образом, чтобы сохранялось существо искомого решения. Вопрос о том, как выбрать такое приближение, не исследован. Естественная рекомендация состоит в том, чтобы согласовать как больше моментов исходных распределений, начиная с первого момента. Исследование точности такого приближения только начиналось [1].

В статье [2] автором данной статьи идея дискретной аппроксимации исходных распределений, предложенная в [1], была распространена на применение гипердельтной аппроксимации распределений, основанной на представлении распределений в виде сумм дельта-функций Дирака с вероятностными весами. Определение неизвестных параметров аппроксимаций осуществлялось путём решения системы нелинейных уравнений, составленных по методу равенств начальных моментов.

Однако при решении уравнения Винера-Хопфа (3), в котором плотность вероятности (2) может быть сосредоточена на всей оси $(-\infty<t<\infty)$, гипердельтная аппроксимация [2] неприменима, так как начальные моменты нелинейных уравнений могут принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Поэтому в статье [3] произведена коррекция гипердельтной аппроксимации распределений. Сущность коррекции состоит в том, что в системе нелинейных уравнений для определения значений неизвестных параметров применяются не обычные производные от дельта-функций, а производные от характеристических функций, с присущей им мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$. Поэтому в решении могут присутствовать не только дельта-функции вида $\Delta(t-a)$, но и вида $\Delta(t+a)$, а функция Хевисайда для вырожденного распределения вероятностей вместо $\varphi(t)=e^{iat}$ – $\varphi(t)=e^{-iat}$, где a – некоторая вещественная постоянная величина. Благодаря выполнению коррекции гипердельтного распределения и использованию характеристических функций удалось дальше развить метод Л. Клейнрока и выполнить исследование [4].

Расширение возможностей гипердельтной аппроксимации благодаря выполненной коррекции и применению аппарата характеристических функций позволяет решать интегральное уравнение Винера-Хопфа при более общих видах распределений интервалов времени между поступающими требованиями на вход и времени их обслуживания в СМО. Можно утверждать и о решении интегрального уравнения Винера-Хопфа не только для дискретных исходных распределений, но и для широкого класса гладких распределений. Кроме того, при определённых навыках допустимо получение решений и в том случае, когда исходные распределения могут иметь и конечное число разрывов второго рода.

Примеры гипердельтных аппроксимаций нормальных распределений и их характеристических функций. Пусть входное распределение требований и распределение их обслуживания задаются нормальными плотностями вероятностей:

$$a(x)=dnorm(x,n,\delta),\ b(x)=dnorm(x,m,\sigma). \qquad (4)$$

Если случайные величины сосредоточены на положительной полуоси абсцисс, тогда характеристические функции для (4) принимают вид:

$$\varphi_a(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it(n-\delta)}+e^{it(n+\delta)}\right),$$
$$\varphi_b(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it(m-\sigma)}+e^{it(m+\sigma)}\right), \qquad (5)$$

где i – мнимая единица.

Если случайные величины сосредоточены на отрицательной полуоси абсцисс, тогда характеристические функции для (4) принимают вид:

$$\varphi_a(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-it(n-\delta)}+e^{-it(n+\delta)}\right),$$
$$\varphi_b(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-it(m-\sigma)}+e^{-it(m+\sigma)}\right). \qquad (6)$$

Характеристическая функция для суммы случайных величин, имеющих плотности вероятностей (4), определяемая плотностью вероятностей

4 2019 □□□□□□.indd 74 25.12.2019 11:52:20

$$c_+(x) = \int_0^x b(x-z)a(z)dz, \tag{7}$$

принимает вид:

$$\varphi_+(t) = e^{it(n-m)}\cos(\delta t)\cos(\sigma t), \tag{8}$$

а характеристическая функция для разности случайных величин, определяемая плотностью вероятностей

$$c_-(x) = \int_0^\infty b(x+z)\,a(z)dz, \tag{9}$$

принимает вид:

$$\varphi_-(t) = e^{-it(n-m)}\cos(\delta t)\cos(\sigma t). \tag{10}$$

Распределение максимума в теории случайных процессов

Задача распределения максимума в теории случайных процессов применительно к системе массового обслуживания для одноканальной системы, как отмечено во введении к данной статье, формально сводится к последовательному решению уравнений (1),(2) и (3). Окончательно она представляется как задача решения интегрального уравнения Винера-Хопфа.

Обращаясь ещё раз к изложению особенностей и трудностей получения решения уравнения Винера-Хопфа, отметим, что использование гипердельтной аппроксимации распределений вероятностей с учётом введённой для неё коррекции распространения на всю вещественную область и применение математического аппарата характеристических функций позволяет решать интегральное уравнение Винера-Хопфа при более общих видах распределений интервалов времени между поступающими требованиями на вход и времени их обслуживания в СМО. Можно утверждать о решении интегрального уравнения Винера-Хопфа не только для дискретных исходных распределений, но и для широкого класса гладких распределений. Кроме того, при определённых навыках допустимо получение решений и в том случае, когда исходные распределения могут иметь и конечное число разрывов второго рода. Покажем возможности реализуемости сделанного нами утверждения на основе метода последовательных приближений, излагаемого в следующем разделе статьи.

Метод последовательных приближений для функции распределения времени ожидания обслуживания требования в одноканальной системе массового обслуживания

Первое приближение. Пусть заданы два произвольных распределения интервалов входящего и обслуживающего потоков требований в СМО. Определим плотность вероятности разности случайных величин интервалов входящего и обслуживающего потоков требований по формуле (2). Плотность подвергаем свёртыванию с единичной плотностью в нуле времени. Вычисляем интеграл по отрицательной области полученной свёртки. Его значение представим в виде импульсной вероятности в точке нуль, а в дальнейшем приписываем в нуле к положительной части плотности (2). Суммируем импульсную вероятность в нуле и интеграл по положительной части плотности $c(t)$. Полученное выражение и представляет первое приближение функции распределения времени ожидания обслуживания в СМО. Это возрастающая по времени функция со ступенькой в начале координат и стремящаяся к единице при $t\to\infty$. *Второе приближение*. Представим сумму импульсной вероятности в нуле и плотность вероятности $c(t)$ при $t>0$ как новую плотность вероятности и пронормируем её единичным значением. Получим $d_1(t)$. Далее, выполняя свёртку плотностей $d_1(t)$ и $c(t)$, получим плотность $c_1(t)$. Интеграл от $c_1(t)$ плотности по отрицательной части абсцисс представляет в нуле координат второе начальное значение функции распределения времени ожидания. Сложив это значение вероятности с интегралом по положительной части абсцисс от плотности $c_1(t)$, получим второе приближение функции распределения времени ожидания требования в СМО. *Третье приближение*. Оно находится по аналогичному алгоритму, изложенному для второго приближения. Это приближение определяется уже по новой плотности вероятности $c_2(t)$, определяемой по тому же алгоритму.

Указанный процесс определения приближений выполняется столько раз, пока два соседних приближения с определённой точностью не окажутся совпадающими. Именно в этом случае мы приходим к стационарному значению функции распределения времени ожидания требования в СМО.

Пример расчёта последовательных приближений

Пусть плотности вероятностей длительностей времени между поступающими заявками и времени их обслуживания в СМО описываются как нормальные:

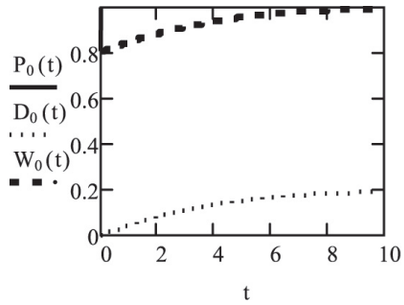

Рис. 1.

4 2019 □□□□□□.indd 75 25.12.2019 11:52:21

$$a(x) = dnorm(x, n, \delta),\ n = 15h.,\ \delta = 5\delta.;$$
$$b(x) = dnorm(x, m, \sigma),\ m = 10h.,\ \sigma = 3h. \qquad (10)$$

Первое приближение. Исходная плотность разности двух длительностей будет определяться по формуле (2). Тогда значение функции распределения времени ожидания обслуживания заявки (ФРВО) при t=0 будет равно:

$$W_0 = \int_{-\infty}^{0} c(z)dz = 0.805. \qquad (12)$$

Представим это значение в виде импульсной функции с длительностью на оси абсцисс [0,0.03] как функцию времени, имеющую постоянное значение на данном интервале, равное $W0$:

$$P_0(t) = W_0 2[\Phi(t-0) - \Phi(t-0.03)].$$

Вычислим дополнительную величину вероятности на положительной части оси абсцисс:

$$D_0(t) = \int_0^t c(z)dz. \qquad (13)$$

Сложив (13) и (14), получаем первое приближение ФРВО заявки в СМО:

$$W_0(t) = P_0(t) + D_0(t). \qquad (14)$$

Для проверки вычисления, например найдём $W_0(0) = 0.805, W(30) = 1.0$. Функции (15) в виде графиков представлены на рисунке 1.

Второе приближение. Найдя первое приближение ФРВО заявки в СМО, необходимо сначала найти соответствующую ему функцию плотности вероятности $c_1(x)$, чтобы её свернуть с предшествующей ей плотности вероятности (2) и затем по свёртке найти второе приближение ФРВО заявки в СМО. Выполним эту процедуру последовательно и представим её графически. Представим следующую последовательность действий:

$$P_1(t) = C_1 \cdot (P_0(t) + c(t)),\ C_1 = 4.101,\ \nu_1 = 2.597h,$$
$$\nu_2 = 14.299h^2,\ \delta_1 = \sqrt{\nu_2 - (\nu_1)^2} = 2.748h,$$
$$\eta_1 = \delta_1 / \nu_1 = 1.058\int_0^{\infty} P_1(z)dz = 1. \qquad (15)$$

Приближённо аппроксимируем плотность вероятности $P_1(x)$ нормальной плотностью и представим её характеристическую функцию:

$$\psi_1(t) = e^{i2.597t - \frac{(2.749)^2 t^2}{2}}. \qquad (16)$$

Переход к характеристической функции (16) выполнен для упрощения свёртывания (15) с характеристической функцией начальной плотности вероятности (2), которая в условиях нашего примера принимает вид:

$$\psi_1(t) = e^{-i5t - \frac{34t^2}{2}}. \qquad (17)$$

Далее, перемножив (16) и (17), получим выражение характеристической функции

$$\psi_1(t) = e^{-i2.403t - 20.779t^2}. \qquad (18)$$

Плотность вероятности, соответствующая характеристической функции (18), и есть плотность вероятности для определения второго приближения ФРВО СМО. Обозначим данную плотность как $c_1(x)$. На рис. 2, 3 представлена плотность $c_1(x)$ начальная и после преобразования, а на рис. 4 приведены три графика, аналогичные показанным на рис. 1, но являющиеся результатами для выполненного второго приближения ФРВО СМО. На рис. 3 вместо индекса 1 показана 1 в строке. Величина начального значения ФРВО в нуле времени $P_2(0) = 0.645$.

Третье приближение. Найдя второе приближение ФРВО заявки в СМО, необходимо затем по нему найти соответствующую функцию плотности вероятности $c_2(x)$, чтобы её свернуть с начальной плотностью вероятности $c(x)$ и только после этого по следующей свёртке с $c(x)$ найти третье приближение ФРВО заявки в СМО. Выполняя эту процедуру так же последовательно, как было показано при втором приближении, можно получить все необходимые результаты и представить их в численном и графическом виде. Для краткости изложения приведём лишь основные результаты.

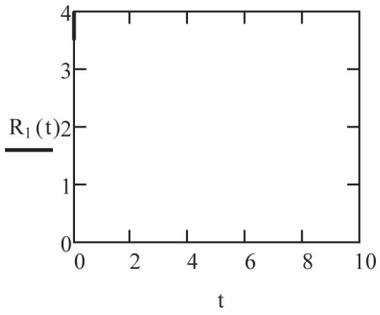

Рис. 2.

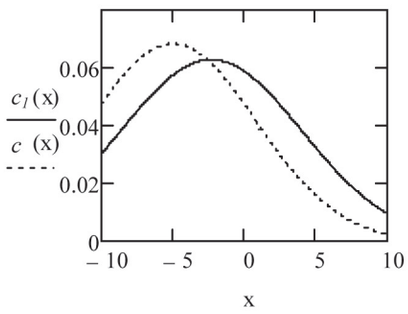

Рис. 3.

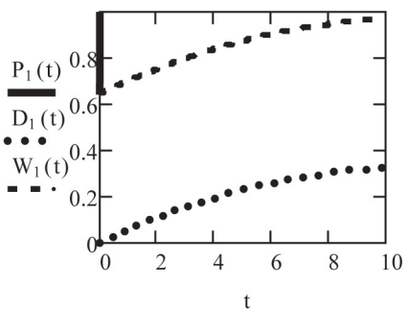

Рис. 4.

4 2019 □□□□□□.indd 76 25.12.2019 11:52:22

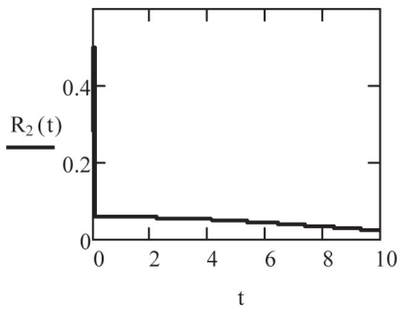

Рис. 5.

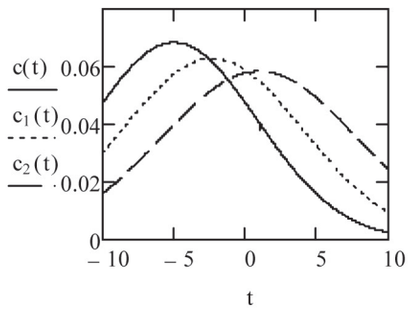

Рис. 6.

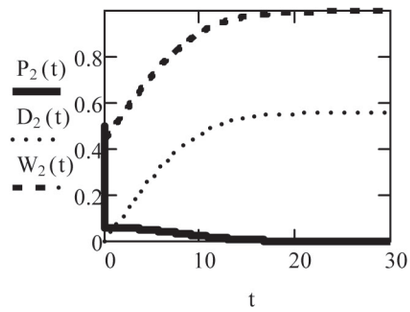

Рис. 7.

На рис. 5 показана сумма импульсной составляющей, равная вероятности – площади над отрицательной части абсцисс $c_1(x)$, перенесённая в начало – нуль координат, плюс положительная часть этой плотности вероятности $c_1(x)$. Иначе говоря, $R_2(x)$ – есть ненормированная плотность вероятности $c_2(x)$. На рис. 6 представлены все три плотности вероятностей: начальная $c(x)$ для первого приближения, для второго приближения $c_1(x)$, и, наконец, нормированная $R_2(x)$, являющаяся плотностью $c_2(x)$ для третьего приближения.

На рис. 7 представлены: $P_2(t)$ – нормированная плотность вероятности $R_2(t)$, но без выполнения её нормальной аппроксимации, $D_2(t)$ – интеграл от $c_2(t)$ по положительной части оси абсцисс. Наконец, $W_2(t)$ – третье приближение к функции распределения времени ожидания обслуживания в СМО.

В заключение рассмотренного примера покажем на одном графике все три выполненных приближения к ФРВО обслуживания поступления требований в СМО.

На рис. 8 представленные приближения по мере их выполнения во времени от первого приближения к третьему наблюдается на начальном участке снижение их вероятностей. Однако по этой тенденции снижения не всегда, по-видимому, следует делать вывод о наблюдаемой тенденции. Всё будет зависеть от вида исходных распределений для уравнения Винера-Хопфа.

На этом примере мы закончим выполнение исследований, не доводя количество приближений до поиска конечного, стационарного приближения.

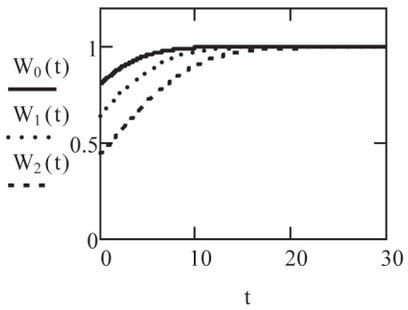

Рис. 8.

Заключение

Известно решение интегрального уравнения Винера-Хопфа в численном виде при условии, что исходные распределения между требованиями входящего потока и длительности их обслуживания представлены в дискретном виде. Результат решения также получается в дискретном виде.

В данной статье поставлена задача получать результат решения уравнения для произвольных исходных распределениях, преимущественно гладких, а затем и для разрывных и смешанных распределений. Эта задача решена благодаря коррекции предложенного ранее гипердельтного распределения для его применения не только на положительной, но и на всей вещественной оси. Именно благодаря этой коррекции можно не ограничиваться односторонним преобразованием Лапласа, а применить преобразование Фурье и аппарат характеристических функций.

На основе этого в статье построен метод последовательных приближений определения функции распределения времени ожидания обслуживания требований в одноканальной системе массового обслуживания. Он справедлив не только для гладких, но и включающих разрывы распределений. Приведён пример расчёта трёх последовательных приближений для нормальных распределений.

Литература

1. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок ; пер. с англ. под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Мир, 1979. – 600 с.

2. Смагин, В. А. О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения / В.А. Смагин, Г.В. Филимонихин // АВТ. – 1990. – № 1. – С. 25–31.

3. Смагин, В. А. Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов / В.А. Смагин // Информация и Космос. – 2015. – № 4. – С. 68–72.

4. Смагин, В. А. Решение интегрального уравнения Винера-Хопфа методом гипердельтной аппроксимации [Электронный ресурс] / В.А. Смагин // Интеллектуальные технологии на транспорте. Электронный журнал. – 2016. – № 1. – С. 39–45. – Режим доступа: http://itt-pgups.ru/article/view/3324, свободный. – Загл. с экрана.

4-2019 □□□□□□.indd 77 25.12.2019 11:52:22