Оптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов при использовании методов инерциального параллельного сближения и сближения по радиолучу

Optimal control of mutual maneuver of spacecrafts using inertial parallel approach methods and approach over radio beam

Гончаревский / Goncharevsky V.
Вилен Степанович
(vilenstepan@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: взаимный маневр – mutual maneuver; относительная система координат – relative coordinate system; линия визирования – collimation line; энергетические затраты – energy input.

В статье рассматривается энергетически оптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов, реализуемое с помощью метода инерциального параллельного сближения и метода сближения по радиолучу. Эти методы относятся к методам движения вдоль линии визирования, для которых особенно актуальна проблема разработки энергетически оптимальных программ управления. Для отыскания таких программ в работе использован один из прямых методов вариационного исчисления – метод Ритца. Моделирование полученных оптимальных и квази-оптимальных управляющих функций позволило сформулировать рекомендации по выбору направления и времени выполнения маневра.

The article considers an energetically optimal control of mutual maneuver of spacecrafts implemented using inertial parallel approach method, and approach over radio beam method. Said methods are referred to the methods of movement along collimation line, for which an issue in developing energetically optimal control programs is especially actual. To find said programs, the paper utilizes one of direct variative calculation methods i.e. Ritz's method. Simulation of optimal and quasi-optimal controlling functions obtained allowed formulating advice in selecting a direction and time for implementing maneuver.

Рассмотрим задачу отыскания энергетически оптимальных непрерывных управляющих функций для случая, когда взаимный маневр (ВМ) космических аппаратов (КА) выполняется с помощью метода инерциального параллельного сближения (ИПС). При решении этой задачи примем следующие исходные условия:

– пассивный аппарат (ПА) обращается вокруг планеты по круговой орбите с угловой скоростью ω. Активный аппарат (АА) выведен на компланарную орбиту, близкую к орбите ПА;

– ВМ рассматривается в визирной относительной системе координат (ОСК) *xy* с началом в центре масс ПА. Угловая скорость вращения осей ОСК в инерциальном пространстве равна нулю, что соответствует управлению по методу ИПС;

– задается время движения АА вдоль стабилизированной линии визирования *T*, а в качестве критерия оптимальности управления $\vec{u}$, обеспечивающего это движение, выбран минимум функционала, характеризующего энергетические затраты (ЭЗ) на выполнение маневра

$$J = \int_0^T F d\tau, \text{ где } F = u^2 = u_x^2 + u_y^2; \quad (1)$$

– предполагается, что для осуществления маневра на АА установлена двигательная установка (ДУ) с тягой, регулируемой как по величине, так и по направлению. В процессе решения задачи ограничений на параметры ДУ, и следовательно на управляющие функции, не накладывается. Такая постановка задачи позволяет воспользоваться для ее решения методами классического вариационного исчисления [1] и общей методикой, изложенной в работе [2].

Согласно этой методике, структура оптимального управления при использовании метода ИПС может быть определена в результате решения вариационной задачи Лагранжа с фиксированными концами, которое можно получить, если удастся найти решение соответствую-

1-2018.indd 150 30.03.2018 11:50:27

щего уравнения Эйлера-Пуассона. В визирной ОСК с учетом голономных условий связи $y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$, накладываемых на кинематику относительного движения (ОД) методом ИПС, это уравнение будет иметь вид

$$x^{IV} + l_{11}\ddot{x} + m_{11}\dot{x} + n_{11}x = 0, \tag{2}$$

где

$$l_{11} = -2a_{21} - b_{12}^2,\ m_{11} = -2(\dot{a}_{11} + b_{12}\dot{b}_{12}),$$
$$n_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 - \ddot{a}_{11} + d(a_{21}b_{12})/d\tau -$$

– коэффициенты, определяемые элементами a_{11}, a_{21}, b_{12} матриц A и B динамической модели ВМ в этой ОСК, описываемой системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - a_{11}x = u_x, \\ &-a_{21}x = u_y. \end{aligned} \tag{3}$$

В системе (3) элементы

$$a_{11} = 3\sin^2\beta - 1,\ a_{21} = 1{,}5\sin 2\beta, \tag{4}$$

где β – угол, характеризующий направление стабилизированной линии визирования (ЛВ) относительно местной вертикали. При использовании ИПС угловая скорость вращения ЛВ в случае компланарного маневра равна по величине и противоположна по знаку угловой скорости обращения ПА вокруг планеты, то есть

$$\dot{\beta} = -1,\ \beta = \beta_0 - \tau. \tag{5}$$

В связи с этим коэффициенты динамической модели ОД вдоль ЛВ являются функциями времени и, следовательно, уравнение Эйлера-Пуассона (2) в данной вариационной задаче представляет собой линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) с переменными коэффициентами. Для отыскания интегральных кривых этого уравнения при граничных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $x(T) = x_k$, $\dot{x}(T) = \dot{x}_k$ необходимо решить двухточечную краевую задачу четвертого порядка для ЛДУ с переменными коэффициентами. Точное решение такой задачи наталкивается на серьезные математические трудности. Поэтому для нахождения экстремалей, минимизирующих функционал (1) при вышеуказанных граничных условиях, целесообразно использовать один из прямых методов вариационного исчисления – метод Ритца [1].

Согласно этому методу приближенное решение вариационной задачи будем искать в виде

$$x(\tau) = \varphi_0(\tau) + \sum_{k=1}^{n} S_k\varphi_k(\tau), \tag{6}$$

где S_k – некоторые постоянные;

φ_0, φ_k – линейно независимые (координатные) функции, такие что $\varphi_0(0) = x_0$; $\varphi_0(T) = x_k$; $\dot{\varphi}_0(0) = \dot{x}_0$; $\dot{\varphi}_0(T) = \dot{x}_k$, а $\varphi_k(\tau)$ удовлетворяют однородным краевым условиям, то есть $\varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0$, $\varphi_k(T) = \dot{\varphi}_k(T) = 0$. Очевидно, что функция (6) удовлетворяет заданным граничным условиям.

Так как точность решения в большой степени зависит от удачного подбора координатных функций, вид последних следует задавать из физического смысла решаемой задачи. Учитывая предполагаемый характер изменения дальности и скорости вдоль ЛВ, а также влияние на него разностного гравитационного ускорения при различном T, в качестве функции φ_0 целесообразно выбрать интегральную кривую вида

$$x = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3, \tag{7}$$

полученную для случая движения аппаратов в свободном пространстве [3], а в качестве функций φ_k степенной полином

$$\varphi_k = kT^{k+1}\tau^2 - (k+1)T^k\tau^3 + \tau^{k+3}\ . \tag{8}$$

Такой подход к выбору вида функций позволяет получить вполне удовлетворительное приближение к точному решению в рассматриваемом диапазоне времени $T \le \pi$ при небольших значениях n (при $n = 2$, $n = 1$ или даже при $n = 0$), где n – число координатных функций φ_k, удовлетворяющих однородным краевым условиям. В свою очередь, это дает возможность существенно упростить вид искомых оптимальных программ управления.

Подбор коэффициентов S_k в решении (6) производится так, чтобы оно давало экстремум функционалу (1). Подставляя выражение (6) в соотношение (1), получим

$$J = \int_0^T F d\tau = f(S_k), \tag{9}$$

где $f(S_k)$ – квадратичная форма переменных S_k.

Для того чтобы дифференцируемая функция $f(S_k)$ при некоторых значениях S_k имела экстремум, необходимо соблюдение для этих значений условий

$$\partial f / \partial S_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots n.$$

Эти условия можно представить в виде следующей канонической системы линейных алгебраических уравнений порядка n

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k S_k = \vec{q}, \tag{10}$$

где $\vec{P}_k$ и $\vec{q}$ зависят от координатных функций, их производных и угловых коэффициентов, характеризующих направление ЛВ.

Итак, приближенное решение поставленной вариационной задачи дается формулой (6), где значения S_k для заданных краевых условий и времени маневра определяются в результате решения системы урав-

1-2018.indd 151 30.03.2018 11:50:28

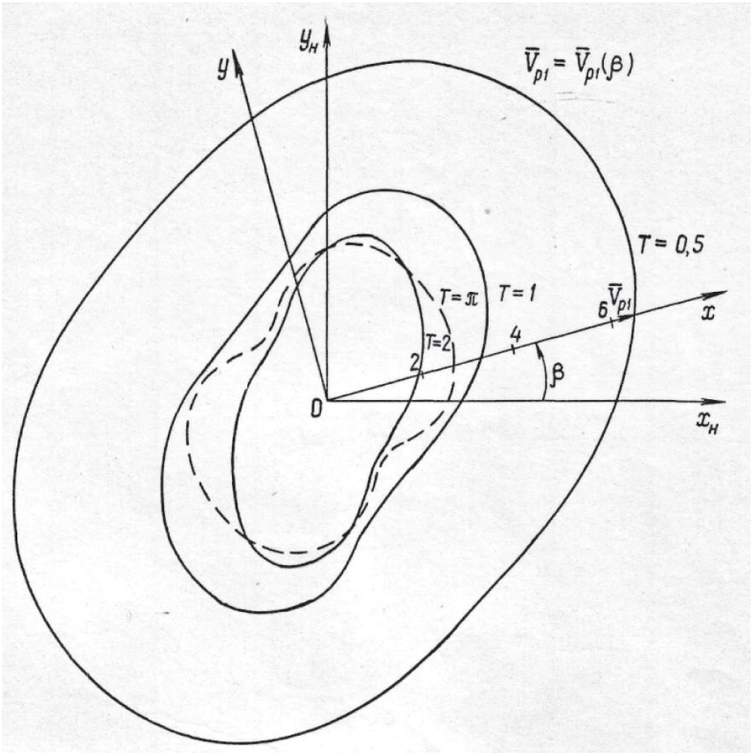

Рис.1

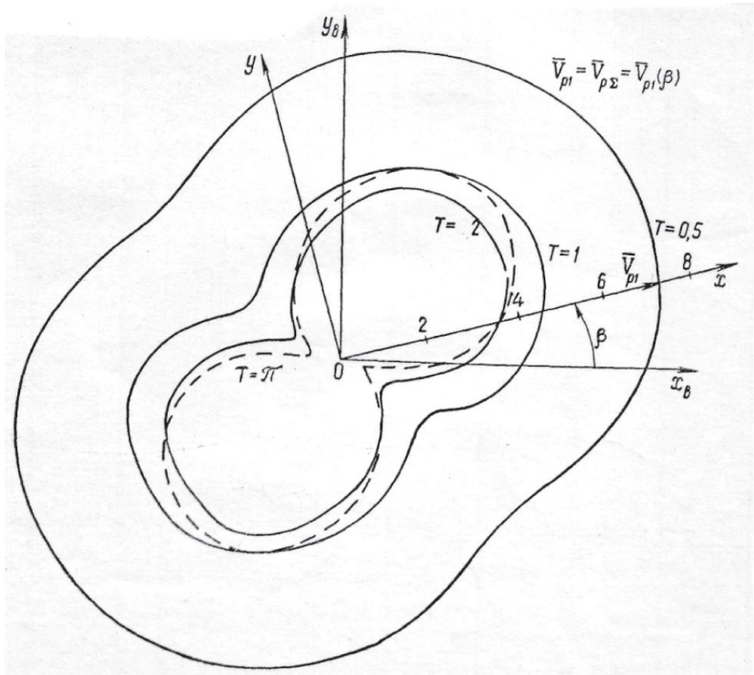

Рис.2

1-2018.indd 152 30.03.2018 11:50:30

нений (10). Решение (6) можно представить в виде степенного полинома

$$x(\tau)=\sum_{i=0}^{m}A_i\tau^i\,, \tag{11}$$

где

$$A_0=C_1;\ A_1=C_2;\ A_2=C_3+\sum_{k=1}^{n}kS_kT^{k+1};$$
$$m=n+3;\ \ A_3=C_4-\sum_{k=1}^{n}(k+1)S_kT^k;$$
$$A_4=S_1;\quad A_5=S_2,...,A_n=S_n.$$

Подстановка полинома (11) в динамическую модель (3) дает искомое оптимальное управление в аналитической форме

$$\vec{u}=\left[\sum_{i=0}^{m}i(i-1)A_i\tau^{i-2}\right]\vec{a}_0-(\sum_{i=0}^{m}A_i\tau^i)\vec{a}_1\,, \tag{12}$$

где

$$\vec{a}_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \vec{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix},$$

и показатель требуемых ЭЗ

$$J=A_S\sin 2\beta+B_C\cos 2\beta+C_T, \tag{13}$$

где A_S, B_C, C_T определяются значениями коэффициентов $A_1\ldots A_n$.

Моделирование управления (12) и расчет показателя (13) показывает, что для времени $T\le\pi$ решение (6) при условии выбора в качестве φ_0 функции вида (7) дает достаточно хорошее приближение к точному решению уже при $n\le 2$. Это подтверждает скорость сходимости метода Ритца для данной вариационной задачи, которую можно оценить по величинам коэффициентов S_k и значению показателя J для различных краевых условий и различных значений n. Так, при $T\le 1$ ввиду малости S_k и относительной разницы $W_n=(J_{n-1}-J_n)/J_n$, где J_n и J_{n-1} – значения показателя (13) при числе координатных функций φ_k, равном n и $n-1$, можно ограничиться в решении только функцией φ_0, т.е. значением $n=0$, при $1<T<2$ достаточно применение двух функций φ_0 и φ_1, а для $T>2$ следует использовать три функции φ_0, φ_1 и φ_2. Например, в случае сближения КА с мягким контактом при начальных условиях маневра $\beta=\dot{x}_0=0$ и времени T=1 относительная разница $W_1=(J_0-J_1)/J_1=0{,}001$, т.е. 0,1%, при тех же начальных условиях и T=2 величины W_1=0,1(10%) и $W_2=(J_1-J_2)/J_2=0{,}03(3\%)$, а $W_{1\text{-}2}=(J_0-J_2)/J_2=0{,}13(13\%)$. Последнее обстоятельство следует учитывать при отыскании оптимальных и квазиоптимальных управлений по соотношению (12).

В качестве примера определим ЭЗ на реализацию оптимальной программы (12) для случая сближения с мягким контактом. Эти затраты можно оценить по значениям интеграла $V_{p1}=\int_0^T Udt$, которые были получены численным интегрированием. Результаты расчетов для случая, когда начальные орбиты аппаратов компланарны и близки к круговым, представлены в виде графиков на рис.1. Видно, что V_{p1} при T<0,5 слабо зависят от направления сближения. С увеличением T величина V_{p1} уменьшается и зависимость ее от угла β усиливается. Это объясняется тем, что здесь маневр выполняется с малым уровнем тяги, сравнимым с разностным гравитационным ускорением. Так как это ускорение зависит от относительного положения аппаратов, то и ЭЗ при больших T делаются зависимыми от направления сближения. Максимум функции $V_{p1}=V_{p1}(\beta)$ при $T\le 0{,}5$ соответствует углам β, близким к 45° и 225°, а минимум – к 135° и 315°. С ростом T угол β, при котором наблюдается максимум, увеличивается (при $T=\pi$ он равен примерно 60...70° и 240...250°), а положение минимума остается практически неизменным.

Таким образом, с энергетической точки зрения целесообразно начинать движение АА вдоль стабилизированной ЛВ при ее угловом положении β=135°(315°), а время маневра задавать в пределах 1<T<(2...2,5). Такой выбор T желателен и с точки зрения упрощения системы управления, ибо в этом случае можно воспользоваться без существенного увеличения ЭЗ квазиоптимальными программами с числом $n\le 2$.

Рассмотрим теперь задачу определения структуры оптимального управления в случае использования метода сближения по радиолучу (СРЛ). Так как в этом методе угловая скорость вращения линии визирования $\dot{\beta}$ равна угловой скорости вращения ПА–цели относительно ПА-базы $\dot{\beta}_ц$, а именно

$$\dot{\beta}=\beta_ц,\quad \beta=\beta_ц\,, \tag{14}$$

то оптимальные и квазиоптимальные программы управления и соответствующие им ЭЗ получаются путем подстановки в соотношения для степенного полинома (11) законов изменения углов и угловых скоростей ЛВ, определяемых формулами (14).

Если ПА-база и ПА-цель находятся на близких к круговым компланарных орбитах, то эти законы имеют вид

$$\beta=\mathrm{arctg}[1/(1{,}5\tau+\mathrm{ctg}\beta_0)],\ \dot{\beta}=-1{,}5\sin^2\beta\,, \tag{15}$$

где β_0 – угловое положение ЛВ в момент начала маневра.

Результаты расчета ЭЗ на маневр с мягким контактом при методе СРЛ для законов (15) в случае использования квазиоптимальной программы с числом n=0 представлены на рис. 2. Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы:

1-2018.indd 153 30.03.2018 11:50:31

– наиболее благоприятные с точки зрения энергозатрат направления соответствуют углам β=135°–165°(315°–345°), а наименее благоприятные – β=30°–45°(210°–225°);

– ЭЗ уменьшаются для всех направлений при увеличении времени до значений T=2;

– при T>2 для направлений с $V_{p1\min}$ наблюдается дальнейшее уменьшение ЭЗ, в то время как для направлений с $V_{p1\max}$ затраты начинают увеличиваться и разница между максимальными и минимальными ЭЗ существенно возрастает (так, если при T=0,5 максимум превышает минимум примерно в 1,5 раза, то для $T = \pi$ это превышение уже составляет около 8,5 раз). Интересно также отметить, что при $T = \pi$ и β=157° затраты приближаются к значениям, соответствующим оптимальному хомановскому маневру.

Литература

1. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

2. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – МО РФ, 1998. – 87 с.

3. Гончаревский, В. С. Оптимальные программы управления относительным движением космических аппаратов в свободном пространстве / В.С. Гончаревский // Информация и Космос. – 2012. – № 1. – С. 110–112.

1 2018.indd 154 30.03.2018 11:50:31