Метод и алгоритм оптимальной оценки защищенности автоматизированных систем

Method and Agorithm of Optimal Estimation of Automated Systems Security

Карманов / Karmanov A.
Андрей Геннадиевич
(karmanov.nip@gmail.com)
кандидат технических наук, доцент.
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (Университет ИТМО), доцент кафедры ГИС.
г. Санкт-Петербург

Суханов/Sukhanov A.
Андрей Вячеславович
(AVSuhanov@eureca.ru)
доктор технических наук, доцент.
Закрытое акционерное общество «ЭВРИКА», заместитель генерального директора по науке.
г. Санкт-Петербург

Карманова / Karmanova N.
Наталья Андреевна
(karmanov.nip@gmail.com)
Университет ИТМО, лаборант кафедры ГИС.
г. Санкт-Петербург

Елисеева / Eliseeva V.
Валерия Валерьевна
(valeria_eliseeva@mail.ru)
Университет ИТМО, магистрант кафедры ГИС
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: стратегия управления – management strategy; стратегия оценивания – evaluation strategy; качество оценивания – assessment quality; гауссовость – gaussianity.

В статье описывается алгоритм, позволяющий эффективно реализовать процедуру синтеза оптимальной оценки защищенности автоматизированных систем. Для этого рассматриваются задачи с управляемыми наблюдениями, проводятся вычисления апостериорных распределений для дискретно-непрерывных наблюдений, составляется алгоритм фильтрации и осуществляется аппроксимация характеристик обнаружения.

The paper describes algorithm allowing to effectively implement the procedure of synthesizing optimal estimation of automated systems security. To do this, tasks with controlled observations are considered, calculations of a posteriori distributions for discrete-continuous observations are carried out, filtration algorithm is developed, and approximation of detection characteristics is performed.

Существующие на настоящий момент экспертные системы, призванные облегчить работу экспертов и автоматизировать процесс оценки защищенности автоматизированных систем, имеют ряд существенных недостатков. Экспертные оценки защищенности системы являются вероятностными и крайне неточными. Отсутствуют нормированные показатели защищенности по установленным уровням доверия, что не позволяет сделать однозначного вывода о соответствии уровня защищенности систему установленному уровню.

Также при проведении мероприятий по обеспечению безопасности систем не учитывается, что процессы моделирования (управления) и оценки таких систем являются непрерывными и взаимосвязанными. Оценки систем должны представляться в численном значении, которое может быть легко сравнимо с нормированным показателем.

Рассмотрим процесс оптимальной оценки состояния такой системы.

Исходными данными для совместного оптимального управления и оценки системы являются:

– множества: состояний системы, наблюдений за системой оценщиком, управляющих воздействий разработчика, случайных возмущений состояний и наблюдений, соответственно;

– $X=\{\overline{x}_{T-1}\}$, $Z=\{\overline{z}_{T-1}\}$, $U=\{\overline{u}_{T-1}\}$, $V=\{\overline{v}_T\}$, $V'=\{\overline{v}'_T\}$– множества последовательностей: состояний – $\overline{x}_T=(x_0,...,x_T)$;наблюдений – $\overline{z}_{T-1}=(z_0,...,z_{T-1})$;управляющих воздействий – $\overline{u}_{T-1}=(u_0,...,u_{T-1})$ и $\overline{v}_{T-1}=(v_0,...,v_{T-1})$ – случайных возмущений состояний и наблюдений в соответствующие моменты времени.

Предположим, что задана последовательность $\overline{X}_T=\{X_{-1},X_0,...,X_T\}$,состоящая из функций $X_t: X\times V\to X$, обладающих свойством неупреждаемости [1]. Под уравнением состояний системы будем понимать соотношения:

$$x_{t+1} = X_t\left(\overline{x}_t, \overline{v}_{t+1}\right), t = 0,...,T-1, x_0 = X_{-1}\left(v_0\right). \quad (1)$$

Аналогично, если задана последовательность функций $\overline{Z}_{T-1} = \left(Z_0,...,Z_{T-1}\right)$, $Z_t : X \times U \times V' \to Z$ со свойством неупреждаемости, то под уравнением управляемых наблюдений будем понимать соотношение:

$$z_t = Z_t\left(\overline{x}_t, \overline{u}_t, \overline{v}'_t\right), t = 0, T-1. \quad (2)$$

Последовательность функций $\overline{U}_{T-1} = \left(U_0, U_1, ..., U_{T-1}\right)$, определенных на множестве $U \times Z$ со значениями в множестве U, обладающих свойствами неупреждаемости – стратегия управления. Класс допустимых стратегий управления U^{∂} состоит из неупреждающих и регулярных стратегий, обеспечивающих включения $\overline{x}_T \in X$, $z_{T-1} \in Z$.

Последовательность функций $\overline{H}_T=(H_0,H_1, \ldots , H_T)$, заданных на $U \times Z$ со значениями в X, обладающих свойствами неупреждаемости – стратегия оценивания. H^{∂} – множество всех стратегий. Предположение неупреждаемости стратегий оценивания и управления позволяет искать их составляющие в фиксированный момент времени в замкнутой форме:

$$\hat{x}_t = H_t\left(\overline{u}_{t-1}, \overline{z}_{t-1}\right), t = 0,...,T, \quad (3)$$

$$u_t = U_t\left(\overline{u}_{t-1}, \overline{z}_{t-1}\right), t = 1,...,T-1, u_0 = U_0. \quad (4)$$

Следует заметить, что для функций U_t, H_t и их значений u_t, $\hat{x}_t$ также применимы определения управление и оценивание.

На множестве $X \times X$ задан набор функций $C_t(x_t, \hat{x}_t)$, характеризующих качество оценивания. Задача оценивания состоит в минимизации по $\overline{H}_T$ математического ожидания суммарных потерь. Качество оценивания в задаче управления также зависит от выбора управляющей стратегии $\overline{U}_{T-1}$, так как от управлений зависят оценки (3) и наблюдения (2), по которым они строятся. Задача оптимального управления и оценивания принимает вид:

$$J\left[\overline{U}_{T-1}, \overline{H}_T\right] = M_{\overline{x}T, \overline{z}T-1}\left\{\sum_{t=0}^{T} c_t\left(x_t, H_t\left(\overline{z}_{t-1}, \overline{U}_{t-1}\right)\right)\right\} \to \min_{\substack{U_{T-1} \in U^{\partial} \\ H_T \in H^{\partial}}}, \quad (5)$$

где M – математическое ожидание, которое берется по множествам X и Z реализаций процессов состояния и наблюдения. Составляющие стратегий управления и оценивания, доставляющих минимум функционалу (5), будут в дальнейшем обозначаться U_t^*, H_t^*, а их значения (оптимальные уравнения и оценки) – через u_t^*, x_t^*.

Задачи с управляемыми наблюдениями

Поскольку функция потерь c_t зависит непосредственно только от текущего состояния системы x_t, функционал $J\left[\overline{U}_{T-1}, \overline{H}_T\right]$ может быть записан с учётом свойств условного математического ожидания в виде:

$$\begin{gathered} J\left[\overline{U}_{T-1}, \overline{H}_T\right] = M_{x_0}\left\{c_0\left(x_0, H_0\right)\right\} + \\ + M_{z_0}[M_{x_1|z_0}\left\{c_1\left(x_1, H_1\left(z_0, u_0\right)\right)\right\} + \\ + M_{z_1|z_0}[M_{x_2|\overline{z}_1}\left\{c_2\left(x_2, H_2\left(\overline{z}_1, \overline{U}_1\right)\right)\right\} + \\ \ldots + M_{z_{T-1}|\overline{z}_{T-2}}[M_{x_T|\overline{z}_{T-1}}\left\{c_T\left(x_T, H_T\left(\overline{z}_{T-1}, U_{T-1}\right)\right)\right\}]\ldots]] \end{gathered}$$

откуда, меняя порядок усреднений и минимизаций, получим:

$$\begin{gathered} \min_{\substack{U_{T-1} \in U^{\partial} \\ H_T \in H^{\partial}}} J\left[\overline{U}_{T-1}, \overline{H}_T\right] = \min_{H_0} M_{x_0}\left\{c_0\left(x_0, H_0\right)\right\} + \\ + \min_{U_0}(M_{z0}[\min_{H_2} M_{x_1|z_0}\left\{c_1\left(x_{01}, H_1\left(z_0, U_0\right)\right)\right\} + \\ + \min_{U_1}\left(M_{z1|z_0}\left[\min_{H_2}\left(M_{x1|\overline{z}_1}\left\{c_2\left(x_2, H_2\left(\overline{z}_1, \overline{U}_1\right)\right)\right\} + \right.\right.\right. \\ \ldots + \min_{U_t}\left(M_{zt|\overline{z}_{t-1}}\left[\min_{H_{t+1}} M_{t+1|\overline{z}_t}\left\{c_{t+1}\left(x_{t+1}, H_{t+1}\left(\overline{z}_t, \overline{U}_t\right)\right)\right\} + \right.\right. \\ + \ldots + \min_{U_{T-1}}\left(M_{z_{T-1}|z_{T-2}}\left[\min_{H_T} M_{x_T|\overline{z}_{T-1}}\left\{c_T\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left.\left.\left.\left(x_T, H_T\left(\overline{z}_{T-1}, \overline{U}_{T-1}\right)\right)\right\}\right]\right)\right]\right)\right]\right). \end{gathered} \quad (6)$$

Пусть на множествах X и Z выделены σ-алгебры их измеримых подмножеств. Обозначим через $\mu(A_x, Z)$ условное распределение состояния системы: $\mu(A_x \mid z) = M\left\{I_{A_x} \mid z\right\}$, где A_x – измеримое подмножество X; I_A – индикатор множества A. Поскольку $M_{x|z}\left\{c(x) I_{A_x}\right\} = \int_{A_x} c(x) d\mu(x \mid z)$, где интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса, из (6) следует, что процедура синтеза совместно оптимальных стратегий управления и оценивания может быть записана в виде рекуррентного алгоритма $(k = 0,...,T)$:

$$f_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{U}_{T-1-k}, \hat{x}_{T-k}) = \int_x c_{T-k}(x_{T-k}, \hat{x}_{T-k}) d\mu(x_{T-k} \mid \overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}), \quad (7)$$

$$x_{T-k}^* = \arg\min_{x \in X} f_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}, x) \triangleq H_{T-k}^*(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}), \quad (8)$$

$$\varphi_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}) = f_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}, H_{T-k}^*(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k})), \quad (9)$$

$$\begin{gathered} r_k(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k}, u_{T-1-k}) = \int_z [\varphi_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}) + \\ = \int_z [\varphi_k(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k}) + \rho_{k-1}(\overline{Z}_{T-1-k}, \overline{u}_{T-1-k})] \\ d\mu(Z_{T-1-k} \mid \overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-1-k}), \end{gathered} \quad (10)$$

$$u_{T-1-k}^* = \arg\min_{x \in X} r_k(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k}, u) \triangleq U_{T-1-k}^*(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k}), \quad (11)$$

$$\rho_k(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k}) = r_k(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k}, U_{T-1-k}^*(\overline{Z}_{T-2-k}, \overline{u}_{T-2-k})), \quad (12)$$

Этот алгоритм является аналогом уравнений Беллмана теории оптимального управления для задач с управляемыми наблюдениями.

Процедура, подобная (7)÷(12) и предназначенная для определения субоптимальных стратегий при неаддитивном функционале, была предложена в [2]. В отличие от упомянутой процедуры, предлагаемый алгоритм даёт точное решение задачи. Уравнения Беллмана для задач с управляемыми наблюдениями, полученные в [3], выписывались в предположениях:

1) линейности уравнений состояний и наблюдений, что позволило обойтись известными алгоритмами фильтрации, основанными на теореме об условной гауссовости;

2) независимости функционала от оценок, то есть решалась только задача управления при «энергетическом» функционале качества.

Вычисления апостериорных распределений для дискретно-непрерывных наблюдений

При реализации алгоритма (7)÷(12) возникает необходимость вычисления апостериорных распределений состояний и наблюдений. Общее решение этой задачи рекуррентной фильтрации изложено в [1] в виде правила.

Вычисления апостериорных распределений для дискретно-непрерывных наблюдений

При реализации алгоритма (7)÷(12) возникает необходимость вычисления апостериорных распределений состояний и наблюдений. Общее решение этой задачи рекуррентной фильтрации изложено в [1] в виде правила.

Правило 1.

Если

$$\mu\left(A_{v_{t+1}} \times A_{v'_t} \mid \overline{x}_t, \overline{z}_{t-1}, u_{t-1}, \overline{v}_t, \overline{v}'_{t-1}\right) = \\ = \mu\left(A_{v_{t+1}} \times A_{v'_t} \mid \overline{z}_{t-1}, u_{t-1}, \overline{v}_t, \overline{v}'_{t-1}\right)$$

при любой стратегии $\overline{U}_{t-1} \in U^{\partial}$ – совместное апостериорное распределение не зависит от состояний системы, тогда для любых $A_{X_{t+1}} \subseteq X$, $A_{Z_{t+1}} \subseteq Z$ имеем:

$$\int_{A_{Z_t}} \mu\left(A_{X_{t+1}} \mid \overline{z}_t, \overline{u}_t\right) d\mu\left(z_t \mid \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right) = \\ = \int_X \mu\left(A_{X_{t+1}} \times A_{Z_t} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right) d\mu\left(x_t \mid z_{t-1}, u_{t-1}\right) \qquad (13)$$

где

$$\mu\left(A_{Z_t} \mid \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right) = M\left\{I_{A_{Z_t}} \mid \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right\},$$

$$\mu\left(A_{X_{t+1}} \times A_{Z_t} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right) = M\left\{I_{A_{X_{t+1}}} \times A_{Z_t} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_t\right\},$$

$$\mu\left(A_{X_t} \mid \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_{t-1}\right) = M\left\{I_{A_{X_t}} \mid \overline{z}_{t-1}, \overline{u}_{t-1}\right\}$$

Для задачи с управляемыми наблюдениями особый интерес представляет случай, когда наблюдение есть совокупность дискретной и абсолютно непрерывной компонент: $z = (\lambda, y)$, $\lambda \in \Delta$, $y \in Y$, $Z = \Delta \times Y$. Переформируем Правило 1 для таких наблюдений, опуская для краткости зависимость распределений от управляющих стратегий.

Если $A_z = A_\lambda \times A_y$, $A_\lambda \subseteq \Delta$, $A_y \subseteq Y$, а $\mu(\lambda)$ и $\mu\left(A_y \mid \lambda\right)$ – дискретная и абсолютно непрерывная мера на Δ и Y соответственно:

$$\mu\left(A_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in A_\lambda} P(\lambda), \mu\left(A_y \mid \lambda\right) = \int_{A_y} p\left(y \mid \lambda\right) dy.$$

Тогда по формуле умножения вероятностей Байеса получим:

$$\mu\left(A_z\right) = \mu\left(A_\lambda \times A_y\right) = \int_{A_\lambda} \mu\left(A_y \mid \lambda\right) d\mu(y) = \\ = \int_{A_y} p\left(y \mid \lambda\right) P\{\lambda\}\, dy \qquad (14)$$

Произведение $p\left(y \mid \lambda\right) P\{\lambda\} \triangleq \pi(\lambda, y) = \pi(z)$ – правдоподобие дискретно-непрерывной случайной величины z.

Согласно свойству [4] интеграла Лебега-Стилтьеса, если $\forall A \subseteq E_\mu\left(A\right) = \int_A \varepsilon d\mu$, то $\int_E f d\mu = \int_E f \varepsilon dy$. Подставляя $\mu\left(A_z\right)$ (14), получим:

$$\int_{A_z} f(z) d\mu(z) = \sum_{\lambda \in A_\lambda} \int_{A_\lambda} f(\lambda, y) p\left(y \mid \lambda\right) P\{y\}\, dy.$$

Если $A_\lambda = \{\lambda_t\}$ – одноточечное множество, то левая часть (13) будет иметь вид:

$$\int_{A_Z} \mu\left(A_{x_{t+1}} \mid \overline{z}_t\right) d\mu\left(z_t \mid \overline{z}_{t-1}\right) = \\ = \int_{A_y} \mu\left(A_{x_{t+1}} \mid \overline{z}_{t-1}, \lambda_t, y_t\right) p\left(y_t \mid \lambda_t, \overline{z}_{t-1}\right) p\left\{\lambda_t \mid \overline{z}_{t-1}\right\} dy_t$$

Также может быть записана и правая часть (13) в виде:

$$\int_X \mu\left(A_{x_{t+1}} \times A_{z_t} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}\right) d\mu\left(x_t \mid \overline{z}_{t-1}\right) = \\ = \int_X \Big[\int_{A_{y_t}} \mu\left(A_{x_{t+1}} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \lambda_t, y_t\right) p\left(y_t \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \lambda_t \times \\ \times P\left\{\lambda_t \mid x_t, \overline{z}_{t-1}\right\} dy_t\Big] d\mu\left(x_t \mid \overline{z}_{t-1}\right)$$

Если же $\mu\left(A_{x_t} \mid \overline{z}_{t-1}\right) = \int_{A_{x_t}} p\left(x_t \mid \overline{z}_{t-1}\right) dx_t$ – абсолютно непрерывная мера, то (13) будет иметь вид:

$$\int_{A_{y_t}} \int_{A_{x_{t+1}}} p\left(x_{t+1} \mid \overline{z}_t\right) dx_{t+1} p\left(y_t \mid \lambda_t, \overline{z}_{t-1}\right) P\left\{\lambda_t \mid \overline{z}_{t-1}\right\} dy_t = \\ = \int_X p\left(x_{t+1} \mid \overline{z}_{t-1}\right) \int_{A_{y_t}} \mu\left(A_{x_{t+1}} \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \lambda_t, y_t\right) \times \\ \times P\left\{\lambda_t \mid x_t, \overline{z}_{t-1}\right\} dy_t dx_t \qquad (15)$$

Если существует предел

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\mu\left(D_\varepsilon\left(x_{t+1}\right) \mid x_t, \overline{z}_{t-1}, \lambda_t, y_t\right)}{V_\varepsilon\left(x_{t+1}\right)} = p\left(x_{t+1} \mid x_t, \overline{z}_t\right) \qquad (16)$$

где $V_\varepsilon(x_{t+1})$ – объём шара $D_\varepsilon(x_{t+1})$ с радиусом ε и центром в точке x_{t+1}. Тогда в (15) при $A_{y_t} = D_{\varepsilon_y}(y_t)$, $A_{x_{t+1}} = D_{\varepsilon_x}(x_{t+1})$, осуществляя предельный переход $\varepsilon_x, \varepsilon_y \to 0$ и восстанавливая зависимость от управляющих стратегий, получаем рекуррентную формулу для апостериорных плотностей:

$$p\left(x_{t+1}\middle|\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)p\left(y_t\middle|\lambda_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right)P\left\{\lambda_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right\} =$$
$$= \int_X p\left(x_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)p\left(x_{t+1}\middle|x_t,\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)p\left(y_t\middle|x_t,\overline{z}_{t-1},\lambda_t,\overline{u}_t\right)\times$$
$$\times P\left\{\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right\}dx_{t+1}$$

Таким образом можно сформулировать Правило 2 – рекуррентный алгоритм фильтрации:

Правило 2

Если в условиях Правила 1 наблюдения $z_t = (\lambda_t, y_t)$ являются дискретно-непрерывными, где $\lambda_t \in \Lambda$, $y_t \in Y$, $Z = \Lambda \times Y$, то мера $\mu\left(A_{\lambda_t}\middle|x_t,\overline{z}_t\right)$ дискретна, а мера $\mu\left(A_{y_t}\middle|\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1}\right)$ абсолютно непрерывна. Если меры $\mu\left(A_{x_t}\middle|\overline{x}_t,\overline{z}_t\right)$, $\mu\left(A_{y_t}\middle|\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right)$, $\mu\left(A_{x_t}\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)$ абсолютно непрерывны и существуют в пределах (16), тогда апостериорная плотность распределения состояний наблюдаемой системы удовлетворяют рекуррентному уравнению:

$$p\left(x_{t+1},\overline{z}_t,\overline{u}_t\right) = \frac{\int_X p\left(x_{t+1}\middle|x_t,\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)p\left(y_t\middle|\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right)}{\iint_{XX} p\left(x_{t+1}\middle|x_t,\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)p\left(y_t\middle|\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right)}$$
$$\frac{P\left\{\lambda_t\middle|x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right\}p\left(x_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)dx_t}{P\left\{\lambda_t\middle|x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right\}p\left(x_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)dx_{t+1}dx_t} \qquad (17)$$

При этом знаменатель дроби представляет собой апостериорное правдоподобие наблюдения $\pi\left(z_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right)$.

Утверждение

Если возмущения состояния и наблюдений независимы, то есть:

$$p\left(x_{t+1}\middle|x_t,\overline{z}_t,\overline{u}_t\right) = p\left(x_{t+1}\middle|x_t\right),$$
$$P\left\{\lambda_t\middle|x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right\} = P\left\{\lambda_t\middle|x_t,u_t\right\},$$
$$p\left\{y_t\middle|\lambda_t,x_t,\overline{z}_{t-1},\overline{u}_t\right\} = p\left(y_t\middle|\lambda_t,x_t,\overline{u}_t\right) \qquad (18)$$

то уравнение (17) упрощается:

$$p\left(x_{t+1},\overline{z}_t,\overline{u}_t\right) = \int_X p\left(x_{t+1}\middle|x_t\right)$$
$$\frac{P\left\{\lambda_t\middle|x_t,u_t\right\}p\left(y_t\middle|\lambda_t,x_t,u_t\right)p\left(x_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)}{\int_X P\left\{\lambda_t\middle|x_t,u_t\right\}p\left(y_t\middle|\lambda_t,x_t,u_t\right)p\left(x_t\middle|\overline{z}_{t-1},\overline{u}_{t-1}\right)dx_t}dx_{t+1} \qquad (19)$$

Следует заметить, что в случае, когда распределение $P\left\{\lambda_t\middle|x_t,u_t\right\}$ не зависит от состояния системы x_t, алгоритм фильтрации принимает более простую форму (1).

В совокупности с уравнениями Беллмана (7)÷(12) построенный алгоритм фильтрации дает полное решение задачи синтеза совместно оптимальных стратегий управления и оценивания в общем случае дискретно непрерывных наблюдений. Для получения эффективного вычислительного алгоритма можно сделать предположение о гауссовском характере некоторых используемых в нем плотностей, что позволит заменить уравнения.

Алгоритм фильтрации

В случае гауссовских распределений, пусть $X,U,V \subseteq R^n, Y,V' \subseteq R^m\ (m \le n), \wedge = \{0,1\}$ и уравнение состояний системы линейно: $x_{t+1} = A_t x_t + v_{t+1}$, а уравнение наблюдений имеет вид: $y_t = \lambda_t(x_t,u_t)D_t x_t + v'_t$, где $\lambda_t(x_t,u_t)$ – двоичный признак получения измерения (признак обнаружения), y_t – измерение состояния процесса.

Если возмущения v_t, v'_t состояний и измерений есть последовательность независимых гауссовских случайных векторов с нулевыми средними и ковариационными матрицами R_t и Q_t соответственно, а условное распределение признака обнаружения имеет вид:

$$\begin{cases} P\left\{\lambda_t = 1\middle|x_t,u_t\right\} = a_t G(x_t,u_t,S_t) \triangleq \alpha_t(x_t,u_t), \\ P\left\{\lambda_t = 0\middle|x_t,u_t\right\} = 1-\alpha_t(x_t,u_t) \triangleq \beta_t(x_t,u_t), \end{cases}$$

где $G(x,u,S) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}[\det S]^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-u)S^{-1}(x-u)\right\}$ – гауссовская плотность распределения в R^n со средним u и ковариационной матрицей S.

Характеристика обнаружения – функция α_t описывает вероятность получения измерения от состояния системы x_t и вектора управляющих параметров u_t – положение центра области контроля измерительного средства. Нормирующий множитель α_t выбирается из условия $\alpha_t(u_t,u_t) = p_o$, где p_t – (центр области контроля) максимальная вероятность обнаружения.

Наблюдение z_t представляет собой пару (λ_t, y_t). Измерение y_t при $\lambda_t = 1$ несет информацию о векторе состояний системы, а при $\lambda_t = 1$ имеет шумовую природу. Во всех случаях признак обнаружения не зависит от состояния, то есть уравнение измерений остается линейным, что позволяет в гауссовском случае использовать алгоритм калмановской фильтрации. Утверждение об условной гауссовости состояния системы, в данном случае, становится неверным.

Если стратегия управления $\overline{U}_{T-1}$ фиксирована. Обозначим через $\omega_t(x_t)$ апостериорную плотность распределения состояний наблюдаемой системы: $\omega_t(x_t) \triangleq p\left(x_t\middle|\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)$, а через $\tilde{\omega}_{t+1}(x_{t+1})$ – экстраполированную апостериорную плотность: $\tilde{\omega}_{t+1}(x_{t+1}) \triangleq p\left(x_{t+1}\middle|\overline{z}_t,\overline{u}_t\right)$. Решение задачи фильтрации определяется следующим Правилом:

Правило 3

Если $\tilde{\omega}(x_t) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i G\left(x_t;\tilde{x}_t^i,\tilde{P}_t^i\right), \sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i = 1$, тогда при сделанных предположениях относительно свойств наблюдаемой системы, возмущений и наблюдений имеем:

$$\tilde{\omega}_{t+1}\left(x_{t+1}\right)=\left(1-\lambda_t\right)\left(1-\tilde{A}_t\right)^{-1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\tilde{\omega}_t^i\Big[G(x_{t+1};A_t\tilde{x}_t^i,A_t\tilde{P}_t^iA_t^T+R_{t+1}-$$
$$-\tilde{A}_t^iG\left(x_{t+1};A_t\tilde{x}_t^i,A_t\tilde{P}_t^iA_t^T+R_{t+1}-\tilde{A}_t^iG\left(x_{t+1};A_t\overline{x}_t^i,A_t\overline{P}_t^iA_t^T+\right.\right.$$
$$\left.\left.+R_{t+1}\right)\right)\Big]+\lambda_t\left[\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\overline{\omega}_t^i\tilde{A}_t^ip_t^i\left(y_t\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{n_t}\tilde{\omega}_t^i\tilde{A}_t^ip_i^i\left(y_t\right)G\left(x_{t+1};A_t\hat{x}_t^i,A_t\hat{P}_t^iA_t^T+R_{t+1}\right),\qquad(20)$$

где

$$\overline{x}_t^i=\tilde{x}_t^i+\tilde{P}_t^i\left[\tilde{P}_t^i+S_t\right]^{-1}\left(u_t-\tilde{x}_t^i\right),\overline{P}_t^i=\tilde{P}_t^i-\tilde{P}_t^i\left[\tilde{P}_t^i+S_t\right]^{-1},\qquad(21)$$

$$\hat{x}_t^i=\overline{x}_t^i\overline{P}_t^iD_t^T\left[D_t\overline{P}_t^iD_t^T+Q_t\right]^{-1}\left(y_t-D_t\overline{x}_t^{-i}\right),\hat{P}_t^i=$$
$$=\overline{P}_t^i-\overline{P}_t^iD_t^T\left[D_t\overline{P}_t^iD_t^T+Q_t\right]^{-1}D_t\overline{P}_t^i,\qquad(22)$$

$\tilde{A}_t^i=a_tG\left(\tilde{x}_t^i;u_t,\tilde{P}_t^i+S_t\right),\tilde{A}_t=\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i\tilde{A}_t^i$ – вероятность обнаружения (измерения);

$p_t^i\left(y_t\right)=G\left(y_t;D_t\overline{x}_t^i,D_t\overline{P}_t^iD_t^i+Q_t\right)$ – плотность распределения полученного измерения.

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1

$$G(y;D_x,Q)G\left(x;\overline{x},\overline{P}\right)=G\left(y;D\overline{x},D\overline{P}D^T+Q\right)G\left(x;\hat{x},\hat{P}\right),$$

где $\begin{cases}\hat{x}=\overline{x}+K\left(y-D\overline{x}\right),\\ \hat{P}=\overline{P}-KD\overline{P},\\ K=\overline{P}D^T\left[D\overline{P}D^T+Q\right]^{-1}.\end{cases}$

Следствие

$$\int_xG\left(y;D_x,Q\right)G(x;\overline{x},\overline{P})dx=G\left(y;D\overline{x},D\overline{P}D^T+Q\right).$$

Утверждение 2

$$G\left(x;x_1,P_1\right)G(x;x_2,P_2)=G\left(x_1;x_2P_1+P_2\right)G\left(x;\overline{x},\overline{P}\right),$$

где $\begin{cases}\overline{x}=x_1+P_1\left[P_1+P_2\right]^{-1}(x_2-x_1)=x_2+P_2\left[P_1+P_2\right]^{-1}\left(x_1-x_2\right),\\ \overline{P}=P_1-P_1\left[P_1+P_2\right]^{-1}P_1=P_2-P_2\left[P_1+P_2\right]^{-1}P_2.\end{cases}$

Следствие

$$\int_xG\left(x,x_1,P_1\right)G\left(x,x_2,P_2\right)dx=G\left(x_1;x_2,P_1+P_2\right).$$

Утверждение 3

Если x – случайный вектор с плотностью распределения вероятностей

$$p\left(x\right)=\sum_{i=1}^n\omega_iG\left(x;x_i,P_i\right),\sum_{i=1}^n\omega_i=1.$$

Тогда

$$\hat{x}=M\left\{x\right\}=\sum_{i=1}^n\omega_ix_i,$$
$$\hat{p}=\operatorname{cov}\left\{x,x\right\}=\sum_{i=1}^n\omega_i\left[P_i+\left(x_i-\hat{x}\right)\left(x_i-\hat{x}\right)^T\right].$$

Утверждение 1 является специальной записью фильтра Калмана.

Утверждение 2 следует из Утверждения 1, если единичная матрица $D=1$. Правильность Утверждения 3 и следствий очевидны.

Рассмотрим правильность предположений, позволивших сформулировать Правило 3. При сделанных предположениях рекуррентный алгоритм фильтрации (18) можно записать в виде двух соотношений:

$$\tilde{\omega}_{t+1}(x_{t+1})=\int_xG\left(x_{t+1};A_tx_t,R_{t+1}\right)\omega_t\left(x_t\right)dx_t,\qquad(23)$$

$$\omega_t\left(x_t\right)=\left(1-\lambda_t\right)\frac{\left[1-\alpha_t\left(x_t\right)\right]\tilde{\omega}_t\left(x_t\right)}{\int_x\left[1-\alpha_t\left(x_t\right)\right]\tilde{\omega}_t\left(x_t\right)dx_t}+$$
$$+\lambda_t\frac{\alpha_t\left(x_t\right)G\left(y_t;D_tx_t,Q_t\right)\tilde{\omega}_t\left(x_t\right)}{\int_x\alpha_t\left(x_t\right)G\left(y_t;D_tx_t,Q_t\right)\tilde{\omega}_tdx_t}.\qquad(24)$$

Учитывая вид $\alpha_t,\tilde{\omega}_t$, с помощью Утверждения 2 получим:

$$\alpha_t\left(x_t\right)\tilde{\omega}_t\left(x_t\right)=\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i\alpha_tG\left(x_t;\tilde{x}_t^i,\tilde{P}_t^i\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i\tilde{A}_t^iG\left(x_t;\overline{x}_t^i,\overline{P}_t^i\right).\qquad(25)$$

Тогда при $\lambda_t=0$ уравнение (24) будет иметь вид:

$$\omega_t\left(x_t\right)\left(1-\tilde{A}_t\right)^{-1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\omega\left[G\left(x_t;\tilde{x}_t^i,\tilde{P}_t^i\right)-\tilde{A}_t^iG\left(x_t;\overline{x}_t^i,\overline{P}_t^i\right)\right].\qquad(26)$$

Если же $\lambda_t=1$, то уравнение (25), с использованием $\tilde{n}_t$ раз Утверждения 1, примет вид:

$$\tilde{\omega}_t(x_t)=[\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i\tilde{A}_t^ip_t^i(y_t)]^{-1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}_t^i\tilde{A}_t^ip_t^i(y_t)G(x_t;\hat{x}_t^i,\hat{P}_t^i).\qquad(27)$$

Подставив уравнения (26) и (27) в уравнение (24) и проинтегрировав в уравнении (23), получим уравнение (20), что подтверждает правильность сформулированного правила.

Полученный алгоритм фильтрации является эффективным, но число достаточных статистик экспоненциально растет, поэтому при его практической реализации необходимо отсекать малые слагаемые апостериорной плотности, основываясь на методах аппроксимации гауссовских сумм [7].

При квадратичной функции потерь $\tilde{n}_t$ Правило 3 позволяет эффективно реализовать процедуру (7), (8) синтеза оптимальной оценки, так как в данном случае

минимум средних потерь достигается на условном математическом ожидании состояния системы, а значит, в силу Утверждения 3, оптимальная оценка состояния имеет вид:

$$x^*_{t+1} = (1-\lambda_t)(1-\tilde{\mathrm{A}}_t)^{-1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}^i_t \mathrm{A}_t(\tilde{x}^i_t - \tilde{\mathrm{A}}^i_t\tilde{x}^i_t) + \\ + \lambda_t[\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}^i_t\tilde{\mathrm{A}}^i_t p^i_t(y_t)]^{-1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\sum_{i=1}^{\tilde{n}_t}\tilde{\omega}^i_t\tilde{\mathrm{A}}^i_t p^i_t(y_t)\mathrm{A}_t\hat{x}_t. \quad (28)$$

Аппроксимация характеристик обнаружения

В некоторых прикладных задачах характеристика обнаружения $\alpha_t(x)$ имеет негауссовскую форму, что приводит к необходимости использования ее гауссовской аппроксимации. Рассмотрим построение данной аппроксимации для скалярного случая.

Если характеристика обнаружения кусочно-постоянна, то: $\alpha_t(x) \equiv \alpha(x) = \begin{cases} 0, |x| \geq \Delta; \\ p, |x| < \Delta, \end{cases}$ и $0 \leq p \leq 1$. Необходимо найти функцию $\tilde{\alpha}(x)$ вида $\tilde{\alpha}(x) = \tilde{p}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, такую что $0 \leq p \leq 1$ и $\|\alpha(x) - \tilde{a}(x)\|^2_{L^2} \to \min$. Так как функция $\tilde{\alpha}(x)$ определяется двумя параметрами $\tilde{p}$, и $s = \sigma^2$, то необходимо решить систему уравнений: $\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}} = 0, \frac{\partial J}{\partial s} = 0$, где $J(\tilde{p}, s) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(x) - \tilde{a}(x)]^2 dx.$

Первое уравнение равносильно

$$p\int_{-\Delta}^{\Delta}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}dx = \tilde{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{s}\right\}dx$$

откуда после вычисления интегралов получаем:

$$\tilde{p} = p\sqrt{2}\ \mathrm{erf}\,\tau,\ \ M_{x|z}\left\{c(x)I_{A_x}\right\} = \int_{A_x} c(x)d\mu(x\,|\,z), \quad (28)$$

где

$$\tau = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\sigma}, \mathrm{erf}\ \mathrm{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left\{-t^2\right\}dt.$$

Второе уравнение также примет вид:

$$p\int_{-\Delta}^{\Delta} x^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}dx = \tilde{p}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left\{-\frac{x^2}{s}\right\}dx \quad (29)$$

Интеграл в правой части уравнения (29) равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma^3$, а интеграл в левой части равен $4\sqrt{2}\sigma^3 I$,

где

$$I = \int_0^\tau f(x)dx, f(x) = x^2\exp\left\{-x^2\right\}.$$

Вычисляя интеграл I по частям получаем:

$$I = \frac{\tau^3}{3}\exp\left\{-\tau^2\right\} + \frac{2}{3}\int_0^\tau x^2 f(x)dx. \quad (30)$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f''(x) = 2\exp\left\{-x^2\right\} - -10f(x) + 4x^2 f(x)$. Интегрирование его по x от 0 до τ позволяет выразить интеграл в правой части уравнения (30) через I:

$$\int_0^\tau x^2 f(x)dx = \frac{1}{4}[2\tau(1-\tau^2)\exp\left\{-\tau^2\right\} + 10I - \sqrt{\pi}\mathrm{erf}\tau]. \quad (31)$$

Подставив уравнение (31) в уравнение (30) найдем значение I: $I = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{erf}\,(\tau) - 2\tau\exp\left\{-\tau^2\right\}$. Тогда уравнение (29) примет вид: $p\sqrt{2}[\mathrm{erf}(\tau) - \tau\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\tau^2\right\}] = \frac{\tilde{p}}{2}$.

Подставив сюда $\tilde{p}$ из уравнения (28),

где

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\tau^2\right\} = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{erf}(\tau),$$

получим нелинейное уравнение: $\mathrm{erf}(\tau) = 2\tau\frac{\partial}{\partial_\tau}\mathrm{erf}(\tau), \tau > 0$, решение которого τ^* может быть найдено численно. Далее искомые параметры $\tilde{p}$, σ находятся из уравнения (28):

$$\tilde{p} = \sqrt{2}p\mathrm{erf}(\tau^*) \quad (31)$$

$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\tau^*} \quad (32)$$

Литература

1. Фомин, В. Н. Адаптивное управление динамическими объектами / В.Н. Фомин, А.Л. Фрадков, В.А. Якубович. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1981. – 448 с.

2. Бакут, П. А. Обнаружение движущихся объектов / П.А. Бакут, Ю.В. Жулина, Н.А. Иванчук ; под ред. П. А. Бакута. – М.: Сов. радио, 1980. – 288 с.

3. Григорьев, Н. Ф. Управление наблюдениями в автоматических системах / Н.Ф. Григорьев, Н.А. Кузнецов, А.П. Серебровский. – М.: Наука, 1986. – 218 с.

4. Вулих, Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла) / Б.З. Вулих. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1973. – 350 с.

5. Жандаров, А. М. Идентификация и фильтрация измерений состояния стохастических систем / А.М. Жандаров. – М.: Наука, 1979. – 112 с.

6. Гришин, Ю. П. Динамические системы, устойчивые к отказам /Ю.П. Гришин, Ю.М. Казаринов. – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.

7. Неймарк, Ю. И. Динамические модели теории управления / Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев. – М.: Наука, 1985. – 400 с.