Аналитический метод расчета траекторий движения космического аппарата при проведении ракетодинамических маневров и коррекций

Analytical Method for Calculating the Trajectories of Spacecraft Executing Dynamic Thrust Maneuvers and Orbit Corrections

Соколов / Sokolov N.
Николай Леонидович
(sokolov@mcc.rsa.ru)
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник.
ФГУП «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения», начальник отдела центра управления полетами.
г. Королев Московской обл.

Ключевые слова: аналитический метод – analytical method; космический аппарат – spacecraft; двигательная установка – thruster; ракетодинамические маневры – dynamic thrust maneuvers; аэродинамическое торможение – aerodynamic braking; точность вычислений – computational accuracy.

При проведении качественного анализа траекторий движения космических аппаратов (КА) представляется эффективным использование аналитических методов. Описывается аналитический метод расчета параметров движения КА при проведении ракетодинамических маневров и коррекций с учетом действия на аппарат аэродинамических сил. Проведен анализ вычислительных погрешностей расчета параметров движения КА. При полном качественном совпадении полученных данных и результатов численного интегрирования дифференциальных уравнений погрешности вычислений не превышают 2–3%.

Using analytical methods is an efficient approach to qualitative analysis of spacecraft (SC) trajectories. An analytical method is described of calculating the parameters of SC motion during dynamic thrust maneuvers and corrections with the account of aerodynamic forces affecting the SC. Computational margins are analyzed of calculating the parameters of SC motion. Full qualitative agreement between the data retrieved and the results of numerical integration of differential equations yields a computational error margin within just 2–3%.

В отечественной и зарубежной литературе известен ряд приближенных аналитических методов расчета траекторий движения КА [1–6, 11]. Однако эти методы, являясь эффективными при расчете параметров орбитального полета КА, не позволяют учитывать динамические процессы, сопровождающие движение КА с работающей двигательной установкой (ДУ) на участках аэродинамического торможения. Вместе с тем, управление движением КА путем проведения активных маневров и коррекций в атмосфере является эффективным при решении ряда практически важных задач космических миссий КА, например при выполнении комбинированных маневров выведения аппарата на спутниковые орбиты планет [4, 7, 8], а также при изменении плоскости движения в верхних слоях атмосферы [4, 9]. Поэтому на этапе предварительного проектирования космических комплексов и аппаратов, а также при разработке алгоритмов автономного управления представляется целесообразным использовать аналитические методы ускоренного расчета траекторий с учетом влияния работающей двигательной установки на динамику полета КА в атмосфере.

В настоящей статье описывается аналитический метод расчета параметров движения КА при проведении ракетодинамических маневров и коррекций с учетом действия на аппарат аэродинамических сил. К элементам научной новизны метода следует отнести алгоритм преобразования исходной математической модели к виду, где в качестве независимого аргумента используется текущая масса КА, что позволяет проводить оценку возможных неточностей отработки двигательной установкой заданных программ управления и оперативно вырабатывать компенсирующие воздействия на аппарат для парирования нештатных ситуаций.

При разработке метода использовалась известная система дифференциальных уравнений в скоростной системе координат, описанная в частности, в работах [4,5]:

$$\frac{dV}{dt} = -\rho V^2 C_x S(2m)^{-1} - g\sin\theta - \omega^2 r\cos\varphi(\sin\varphi\sin\varepsilon\cos\theta -$$
$$-\cos\varphi\cos\theta) + Pm^{-1}\cos\alpha\cos\beta$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \rho V C_y S(2m)^{-1}\cos\gamma - gV^{-1}\cos\theta + Vr^{-1}\cos\theta + 2\omega\cos\varphi\cos\varepsilon +$$
$$+\omega^2 rV^{-1}\cos\varphi(\sin\varphi\sin\varepsilon\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta) + P(mV)^{-1}\sin\alpha\cos\beta$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = [\rho V C_y S(2m)^{-1}\sin\gamma - Vr^{-1}\cos^2\theta\cos\varepsilon\mathrm{tg}\varphi -$$
$$-2\omega(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\varepsilon\cos\varphi) -$$
$$-\omega^2 rV^{-1}\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon + P(mV)^{-1}\sin\beta]/\cos\theta$$
$$\frac{dr}{dt} = V\sin\theta; \quad \frac{dL}{dt} = VRr^{-1}\cos\theta\cos\varepsilon/\cos\varphi;$$
$$\frac{dL_б}{dt} = VRr^{-1}\cos\theta\cos\varepsilon; \quad \frac{dm}{dt} = -\mathrm{P}/\left(\mathrm{P}_{уд}g\right); \quad \lambda = L/R; \quad r = R + h;$$
$$g = \mu_3 r^{-2}; \qquad \varphi = \mathrm{L}_б/\mathrm{R}$$

Здесь V – скорость КА, θ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту, ε – курсовой угол, r – радиус-вектор, соединяющий центр Земли и положение КА, L и $L_б$ – продольная и боковая дальности соответственно, λ – долгота, φ – широта, m – масса КА, t – время, ρ – плотность атмосферы, C_x и C_y – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно, R – радиус Земли, h – высота полета над поверхностью, g – ускорение свободного падения, μ_3 – произведение постоянной притяжения на массу Земли, α – угол между проекцией вектора тяги на плоскость движения и вектором скорости КА, β – угол между вектором тяги и плоскостью движения КА, S – площадь миделева сечения.

Преобразование исходных уравнений проводилось с учетом введения обоснованных допущений об экспоненциальном характере изменения плотности атмосферы от высоты полета КА; о малости значений траекторных углов θ; о малости высот h и боковых дальностей $L_б$ относительно радиуса планеты; о преобладании аэродинамических сил над суммарными значениями гравитационных, центробежных и кориолисовых сил [4, 5, 11]:

$$\rho = \rho_0\exp(-\beta h); \quad \sin\theta \approx \theta; \quad \cos\theta \approx 1$$
$$F_к + F_ц + F_{тр} \ll F_A, \; h \ll R; \quad L_б \ll R$$

Предполагалось, что управляющие параметры КА – тяга двигательной установки P и углы α и β, определяющие ориентацию вектора тяги ДУ в пространстве, – являются кусочно постоянными на ограниченных интервалах изменения значений аргумента. Будем считать, что включение ДУ проводится при тех полетных условиях, где ракетодинамические силы преобладают над аэродинамическими. Однако полный отказ от учета аэродинамических сил может привести к значительному увеличению методических погрешностей расчетов траекторий движения КА. Поэтому с целью снижения ошибок вычислений введем допущение о кусочном постоянстве скоростного напора $q = \rho V^2/2$ на конечных интервалах полета аппарата.

Перейдем к новой независимой переменной m, являющейся основной характеристикой реализации ракетодинамических маневров. Введем замену переменной:

$$\frac{1}{dt} = -\frac{1}{dm}\frac{P}{P_{уд}g}.$$

Это позволяет сократить порядок исходной системы дифференциальных уравнений движения КА и при условии выполнения неравенства $P \neq 0$ преобразовать ее следующим образом:

$$\frac{dV}{dm} = P_{уд}gm^{-1}(C_x SqP^{-1} - \cos\alpha\cos\beta); \; \frac{d\theta}{dm} =$$
$$= -P_{уд}g(mV)^{-1}(C_y SqP^{-1}\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta)$$
$$\frac{d\varepsilon}{dm} = -P_{уд}g(mV)^{-1}(C_y SqP^{-1}\sin\gamma + \sin\beta); \; \frac{dr}{dm} = -V\theta P^{-1}P_{уд}g$$
$$\frac{dL}{dm} = -VP^{-1}P_{уд}g\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}; \; \frac{dL_б}{dm} = -VP^{-1}P_{уд}g\sin\varepsilon \qquad (1)$$

Первое дифференциальное уравнение системы (1) является уравнением с разделяющимися переменными V и m. После его интегрирования получим формулу для вычисления скорости КА V в зависимости от изменения массы аппарата m:

$$V = V_0 + A_1\ln\frac{m}{m_0}, \text{ где } A_1 = P_{уд}g\left(\frac{C_x Sq}{P} - \cos\alpha\cos\beta\right) \qquad (2)$$

С учетом зависимости (2) преобразуем второе уравнение системы (1) к виду, содержащему только две переменные – траекторный угол θ и массу КА m. После интегрирования полученного уравнения запишем аналитическое соотношение между параметрами θ и m:

$$\theta = \theta_0 + A_2\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m\left(V_0 + A_1\ln\frac{m}{m_0}\right)} = \theta_0 + \frac{A_2}{A_1}\ln\left|\frac{A_1}{V_0}\ln\frac{m}{m_0} + 1\right| \qquad (3)$$

где $A_2 = -P_{уд}g(P^{-1}C_y Sq\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta)$

Формулу для определения курсового угла ε в зависимости от массы КА m найдем аналогичным образом путем преобразования и интегрирования третьего дифференциального уравнения системы (1):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + A_3\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m\left(V_0 + A_1\ln\frac{m}{m_0}\right)} = \varepsilon_0 + \frac{A_3}{A_1}\ln\left|\frac{A_1}{V_0}\ln\frac{m}{m_0} + 1\right| \qquad (4)$$

где $A_3 = -P_{уд}g\left(\frac{C_y Sq}{P}\sin\gamma + \sin\beta\right)$

Преобразуя четвертое уравнение системы (1) с учетом (2) и (3), получим зависимость радиус-вектора полета КА r от массы m:

$$r = r_0 - P^{-1} P_{уд} g \sum_{i=1}^{i=4} J_i \qquad (5)$$

Входящие в уравнение (5) интегралы $J_i \left(i = 1, 2, 3, 4\right)$ функционально зависят от текущего значения массы КА m и записываются следующим образом:

$$J_1 = \int_{m_0}^{m} V_0\, \theta_0\, dm; \qquad J_2 = \int_{m_0}^{m} \frac{V_0 A_2}{A_1} \ln\left|\frac{A_1}{V_0} \ln\frac{m}{m_0} + 1\right|,$$

$$J_3 = \int_{m_0}^{m} \theta_0 A_1 \ln\frac{m}{m_0} dm; \quad J_4 = \int_{m_0}^{m} A_2 \ln\left|\frac{A_1}{V_0} \ln\frac{m}{m_0} + 1\right|.$$

После их интегрирования получим аналитические формулы, позволяющие вычислить значения J_i в зависимости от начального m_0 и текущего m значений массы КА:

$$J_1 = V_0 \theta_0 \left(m - m_0\right),$$

$$J_2 = \frac{V_0 A_2}{A_1}\left\{ m \ln\left|\frac{A_1}{V_0} \ln\frac{m}{m_0} + 1\right| - \frac{m_0}{B_1}\left[Ei\left(\ln m\right) - Ei\left(\ln m_0\right)\right]\right\},$$

$$J_3 = \theta_0 A_1 m_0 \left(\frac{m}{m_0} \ln\frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_0} + 1\right),$$

$$J_4 = A_2\left[m\left(\ln\frac{m}{m_0} - 1\right) \ln\left|\frac{A_1}{V_0} \ln\frac{m}{m_0} + 1\right| - m_0 J_4^{/}\right]. \qquad (6)$$

Здесь переменные B_1 и $E_i(x)$, содержащиеся в формуле для расчета значения интеграла J_2, имеют вид [10]:

$$B_1 = \exp\left(\frac{V_0}{A_1}\right), \quad E_i(x) = 0{,}577216 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_1}{i \cdot i!}.$$

Входящий в уравнение для вычисления J_4 дополнительный интеграл J_4' определяется следующим образом:

$$J_4' = \int_{m_0}^{m} \frac{\ln\frac{m}{m_0} - 1}{\ln\frac{m}{m_0} + \frac{V_0}{A_1}} dm.$$

Конечная зависимость для расчета интеграла J_4' получается путем разбиения его на две части и введения в подынтегральное выражение известной экспоненциальной переменной B_1:

$$J_4' = m_0\left\{ B_1\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) - \left(\frac{V_0}{A_1} + 1\right)\left[Ei(\ln m) - Ei(\ln m_0)\right]\right\} / B_1.$$

Итак, с помощью уравнений (6) для расчета интегралов $J_i \left(i = 1, 2, 3, 4\right)$ может быть определен радиус-вектор полета КА r в зависимости от независимого аргумента m.

Далее рассмотрим интегральные уравнения для вычисления продольной L и боковой $L_б$ дальностей полета КА:

$$L = L_0 - P_{уд} g \left(P \cos\varphi\right)^{-1} \int_{m_0}^{m} V\left(m\right) \cos\varepsilon\left(m\right) dm \qquad (7)$$

$$L_б = L_{б0} - P^{-1} P_{уд} g \int_{m_0}^{m} V\left(m\right) \sin\varepsilon\left(m\right) dm \qquad (8)$$

Входящие в уравнения (7) и (8) зависимости для расчета скорости полета V и курсового угла определяются согласно формулам (2) и (4).

Интегралы, содержащиеся в выражениях (7) и (8), принципиально могут быть вычислены путем разложения тригонометрических функций в ряды Маклорена по аналогии с решением уравнений для определения дальностей полета КА в атмосфере, приведенным в работе [5]. Однако при этом расчетные зависимости будут принимать чрезвычайно громоздкий вид, что затрудняет их применение, особенно в бортовом исполнении. Вместе с тем анализ уравнений (2) и (4), подтвержденный численными расчетами, позволяет установить, что при проведении ракетодинамических маневров и коррекций для диапазонов изменения углов β и γ от 0 до $\pm 70 \div 80^0$ или от $\pm 100 \div 110^0$ до $\pm 180^0$ функции $\sin\varepsilon$ и $\cos\varepsilon$ изменяются существенно слабее, чем скорость полета КА V. Это позволяет без значительных погрешностей считать названные тригонометрические функции (в приведенном диапазоне изменения углов β и γ) кусочно-постоянными на конечных интервалах изменения аргумента m. В результате зависимости для определения дальностей полета КА записываются следующим образом:

$$L = L_0 - P_{уд} g P^{-1} \cos\varepsilon\left[V_0\left(m - m_0\right) + A_1 m_0\left(\frac{m}{m_0} \ln\frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_0} + 1\right)\right] / \cos\varphi, \qquad (9)$$

$$L_б = L_{б0} - P^{-1} P_{уд} g \sin\varepsilon\left[V_0\left(m - m_0\right) + A_1 m_0\left(\frac{m}{m_0} \ln\frac{m}{m_0} - \frac{m}{m_0} + 1\right)\right] \qquad (10)$$

При проведении коррекций плоскости или восходящего узла орбиты КА, когда углы β и γ находятся вблизи 90° (или − 90°), скорость движения КА V изменяется слабо, а курсовой угол ε – наиболее интенсивно. Для этих условий расчетные зависимости $L(m)$ и $L_б(m)$ могут быть представлены в виде

$$L = L_0 - P_{уд} g P^{-1} V\left[\cos\varepsilon_0\left(m - m_0\right) - \sin\varepsilon_0 \frac{A_3}{V_0 A_2} J_2\right] / \cos\varphi \qquad (11)$$

$$L_б = L_{б0} - P^{-1} P_{уд} g V\left[\sin\varepsilon_0\left(m - m_0\right) - \cos\varepsilon_0 \frac{A_3}{V_0 A_2} J_2\right] \qquad (12)$$

Интеграл J_2, входящий в соотношения (11) и (12), определяется в соответствии с уравнением (6).

Время движения аппарата в зависимости от текущего значения его массы рассчитывается по формуле

$$t = P^{-1} P_{уд} g \left(m_0 - m\right) \qquad (13)$$

Таким образом, полученные выше расчетные формулы (2–5), (7–13) позволяют определять траекторные характеристики аппарата, движущегося в атмосфере с работающей двигательной установкой,

в зависимости от расхода массы КА и энергетических характеристик ДУ.

Определим области эффективного использования разработанных уравнений при расчете параметров движения КА с работающей двигательной установкой. Применение предлагаемого приближенного аналитического метода, прежде всего, предусматривает предварительное определение рациональных значений интервала изменения аргумента Δm, для которого распространяется допущение о кусочном постоянстве указанных ранее функций (q, $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, P, α, β). При обосновании величины Δm следует исходить из требований к допустимым погрешностям вычислений (очевидно, что при уменьшении величины Δm погрешности сокращаются). Проведенный анализ численных результатов показал, что для КА с начальной массой $m_0 = 150$ кг, из которых 30% расходуется на проведение ракетодинамического маневра, при значении $\Delta m = 5$ кг для достаточно широкого диапазона варьируемых параметров (см. таблицы 1, 2) погрешности расчетов по предлагаемому методу не превышает 3% по сравнению с численным интегрированием. При этом траектория КА с работающей ДУ делится на девять участков по аргументу m (интервал $\Delta m = 5$ кг при номинальном варианте исходных данных, приведенном в таблице 1, соответствует временному интервалу $\Delta t = 1{,}5$ с). Увеличение Δm до 10 кг приводит к ожидаемому возрастанию погрешности до 4÷7%. При дальнейшем росте исследуемого интервала до $\Delta m = 15$ кг погрешности еще более возрастают и составляют 7÷10%. Уменьшать интервал Δm от значения 5 кг представляется нецелесообразным, так как это приводит к громоздкости вычислительных зависимостей, а расчетные погрешности практически не уменьшаются. Так, например, снижение интервала Δm до 3 кг приводит к уменьшению максимальных вычислительных погрешностей до 2,5÷2,7%, что соответствует уровню методических погрешностей. В связи с вышеизложенным, дальнейшие расчеты траектории движения КА проводились для интервала Δm, равного 5 кг.

Анализ численных результатов, представленных в таблице 1, показывает, что для всего рассматри-

Таблица 1

Влияние основных варьируемых характеристик на погрешности расчетов параметров движения КА в атмосфере

(номинальный вариант исходных данных:
$V_0 = 7{,}8$ км/с, $\theta_0 = -4^\circ$, $h_0 = 100$ км, $P_x = 1000$ кг/м^2, $P = 1000$ кг,
$P_{уд} = 300$ с, $\Delta m = 5$ кг, $m_0 = 150$ кг, $m_k = 0{,}7\, m_0$)

Варьируемые параметры	$V_к$, км / с			$\theta_{к,\,град}$			$h_к$, км		
	1	2	Δ, %	1	2	Δ, %	1	2	Δ, %
Номинальный вариант	8,411	8,396	0,18	–8,02	–8,22	–2,4	87,46	87,36	0,11
$\theta_0 = -5^\circ$	8,413	8,396	0,2	–9,02	–9,22	–2,0	85,36	85,24	0,14
$\theta_0 = -3^\circ$	8,409	8,396	0,15	–7,02	–7,22	–2,7	89,57	89,47	0,11
$h_0 = 80$ км	8,408	8,392	0,19	–7,99	–8,17	–2,2	67,48	67,39	0,13
$h_0 = 60$ км	8,324	8,287	0,44	–7,14	–7,08	0,9	48,14	48,15	0,02
$P_x = 500$ кг/м^2	8,411	8,396	0,18	–8,02	–8,21	–2,3	87,46	87,36	0,11
$P_x = 2000$ кг/м^2	8,411	8,396	0,18	–8,02	–8,22	–2,4	87,46	87,36	0,11
$m_к = 0{,}9 m_0$	8,015	8,01	0,06	–5,46	–5,52	–1,0	96,09	96,10	0,01
$m_к = 0{,}5 m_0$	8,949	8,919	0,34	–11,2	–11,6	–3,0	74,46	74,02	0,59

Примечание: 1 – результаты численного интегрирования, 2 – результаты расчетов по предлагаемому методу. Результаты получены для значений управляющих параметров: $\alpha = -45^\circ$, $\beta = -45^\circ$, $\gamma = 0^\circ$.

Таблица 2

Влияние управляющих параметров на погрешности расчетов траекторий движения КА в атмосфере

Управляющие параметры	$V_к$, км/с			$\theta_к$, град			$h_к$, км		
	1	2	Δ, %	1	2	Δ, %	1	2	Δ, %
$\alpha = -90^o$, $\beta = 0^o$	7,820	7,800	0,26	–12,6	–12,7	–1,0	83,66	83,67	0,01
$\alpha = 0^o$, $\beta = 90^o$	7,810	7,800	0,13	–3,88	–3,99	–2,9	91,95	91,83	0,80
$\alpha = -30^o$, $\beta=0^o$	8,847	8,833	0,16	–7,87	–8,11	–3,0	87,22	87,07	0,17
$\gamma = 30^o$	8,411	8,396	0,18	–8,02	–8,22	–2,3	87,46	87,36	0,11
$\gamma = 60^o$	8,411	8,396	0,18	–8,02	–8,22	–2,3	87,46	87,36	0,11

ваемого диапазона изменения варьируемых параметров наибольшие вычислительные погрешности имеют место при расчете конечных значений углов наклона вектора скорости к местному горизонту θ_k и составляют 1÷3%. При этом максимальные значения Δ_{max} = 2,7÷3% соответствуют движению КА на пологих и протяженных активных участках. В этих случаях абсолютные значения погрешностей $\Delta\theta_k$ достаточно большие и могут достигать 0,4°, что приводит к необходимости поиска путей повышения точности при использовании разработанного метода. Погрешности расчета скорости и высоты полета КА существенно меньше и не превышают 0,6%. Особо следует отметить закономерность снижения погрешностей с уменьшением продолжительности активного участка движения КА, т.е. с увеличением конечной массы аппарата $m_к$ после выработки топлива. Показано, что даже при относительно большом расходе топлива, равном 10% от общей массы КА ($m_к = 0{,}9m_0$) вычислительные погрешности малы и составляют 0,01÷0,06%.

Количественный характер расчетных погрешностей подтверждается результатами, представленными в таблице 2. Показано, что для всего рассмотренного диапазона изменения управляющих параметров наибольшие значения вычислительных погрешностей Δ_{max} соответствуют расчетам траекторных углов полета КА θ_k и достигают 3%, а наименьшие значения Δ_{min} имеют место при вычислении скорости КА и не превышают 0,3%, а также высоты полета, где погрешности составляют 0,8%.

Полученные результаты показывают аналогичный уровень расчетных погрешностей при вычислении продольной ΔL и боковой $\Delta L_б$ дальностей полета КА. При этом значения ΔL примерно в два раза больше чем $\Delta L_б$ для всего рассмотренного диапазона изменения параметров θ_0, h_0 и δm. Максимальные значения ΔL составляют 2,2%, что соответствует движению аппарата с большими абсолютными величинами траекторного угла θ_0, а максимальные значения $\Delta L_б$ имеют место при меньших значениях высот полета аппарата.

После выбора величины Δm вычисления координат и времени движения КА проводятся по рекуррентным соотношениям, где в качестве начальных условий для i-го участка кусочного постоянства применяются соответствующие конечные значения для предыдущего ($i-1$)-го участка:

$$m_i = m_{i-1} - \Delta m; \quad V_i = V_{i-1} + A_1 \ln \frac{m_i}{m_{i-1}}$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + A_2 A_1^{-1} \ln \left| \frac{A_1}{V_{i-1}} \ln \frac{m_i}{m_{i-1}} + 1 \right|; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + A_3 A_1^{-1} \ln \left| \frac{A_1}{V_{i-1}} \ln \frac{m_i}{m_{i-1}} + 1 \right|;$$

$$r_i = r_{i-1} - P^{-1} P_{уд} g \sum_{i-1}^{4} J_i \left(m_i, m_{i-1} \right);$$

$$L_i = L_{i-1} - \cos\varepsilon P_{уд} g P^{-1} \left[V_{i-1} \left(m_i - m_{i-1} \right) + \right.$$
$$\left. + A_1 m_{i-1} \left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \ln \frac{m_i}{m_{i-1}} - \frac{m_i}{m_{i-1}} + 1 \right) \right] / \cos\varphi,$$

$$L_{бi} = L_{бi-1} - \sin\varepsilon P_{уд} g P^{-1} \left[V_{i-1} \left(m_{-1} - m_{i-1} \right) + \right.$$
$$\left. + A_1 m_{i-1} \left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \ln \frac{m_i}{m_{i-1}} - \frac{m_i}{m_{i-1}} + 1 \right) \right];$$

$$t_i = t_{i-1} + P^{-1} P_{уд} g \left(m_{i-1} - m_i \right).$$

Следует отметить, что погрешности вычисления значений радиус-вектора r_i зависят от числа членов (n), удержанных в разложении функции $E_i(x)$. В результате анализа численных данных установлено, что для обеспечения погрешностей Δr, не превышающих ~3% (при Δm = 5 кг), достаточно использовать 4 члена разложения: $n = 4$. Рост числа n слабо влияет на сокращение погрешностей расчетов.

Разработанные аналитические зависимости позволяют обеспечить уровень точности, достаточный для проведения качественного анализа динамики полета КА. Показано, что при расчете траекторий движения КА на активных участках, продолжительность которых соответствует потреблению массы топлива до 10% от массы КА, вычислительные погрешности малы и составляют сотые доли процента.

Дальнейшее увеличение точности вычислений, полученных с применением приближенного аналитического метода, может быть достигнуто путем компенсации методических погрешностей, в первую очередь связанных с введением указанных выше допущений.

Анализ исходной системы дифференциальных уравнений показал, что наибольшие методические погрешности вносит допущение о пренебрежении гравитационными силами по сравнению с результирующей ракетодинамических и аэродинамических сил. В этих условиях точность вычислений значительно ухудшается при расчете траекторий движения КА в верхних слоях атмосферы, где аэродинамические силы достаточно малы.

Для парирования влияния введенных допущений определим компенсирующие вариации по скорости δV, траекторному $\delta\theta$ и курсовому $\delta\varepsilon$ углам. Слагаемое $g\sin\theta$ при переходе к уравнению dV/dm преобразуется к виду $g^2\sin\theta P_{уд}P^{-1}$. В предположении кусочного постоянства этого слагаемого на заданных интервалах Δm запишем

$$\delta V = \int_{m_0}^{m} g^2 \sin\theta\, P_{уд} P^{-1} dm = P^{-1} g^2 \sin\theta\, P_{уд}\left(m - m_0\right) \tag{14}$$

Формулы для расчета вариаций $\delta\theta$ и $\delta\varepsilon$ определим, используя выше утверждение о возможности представления коэффициентов $M_1 = 1/\rho r\left(rg/V^2 - 1\right)$ и $M_2 = \cos\varepsilon \operatorname{tg}(L_б/R)(\rho r)^{-1}$ в виде кусочно постоянных функций, что позволяет записать дополнительные слагаемые, характеризующие действие гравитационных сил в правых частях исходных дифференциальных уравнений в виде:

$$\frac{d\theta}{dt} \to -\rho V M_1, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} \to -\rho V M_2.$$

Соответственно, при использовании аргумента m эти зависимости преобразуются следующим образом:

$$\frac{d\theta}{dm} \to q M_1 P_{уд} g \left(PV\right)^{-1}, \quad \frac{d\varepsilon}{dm} \to q M_2 P_{уд} g \left(PV\right)^{-1}.$$

Окончательно имеем

$$\delta\theta = \int_{m_0}^{m} \frac{q M_1 P_{уд} g}{PV} dm = q M_1 P_{уд} g m_0 \left[Ei\left(\ln m\right) - Ei\left(\ln m_0\right)\right] / \left(PA_1B_1\right) \tag{15}$$

$$\delta\varepsilon = \int_{m_0}^{m} \frac{q M_2 P_{уд} g}{PV} dm = q M_2 P_{уд} g m_0 \left[Ei\left(\ln m\right) - Ei\left(\ln m_0\right)\right] / \left(PA_1B_1\right) \tag{16}$$

Отметим, что компенсирующие вариации δV, $\delta\theta$ и $\delta\varepsilon$ принимаются кусочно-постоянными на тех же интервалах по Δm, что и переменные q, $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, M_1, M_2.

Проведенные исследования показали, что при расчете траекторных параметров движения КА в атмосфере в значительном диапазоне изменения граничных условий, массово-габаритных и энергетических характеристик за счет введения дополнительных слагаемых (14–16) максимальные погрешности сокращаются до 2÷3% когда число членов, удерживаемых при разложении функции $E_i(x)$ в степенной ряд, не превышает четырех.

Итак, разработан аналитический метод расчета траекторий движения КА в атмосфере с учетом действия на него ракетодинамических сил. Показано, что при полном качественном совпадении приближенных данных и результатов численного интегрирования исходной системы уравнений, погрешности вычислений не превышают 2÷3%. Принципиально представленный метод может быть применен при расчете траекторий с продолжительными активными участками, например при выведении КА с поверхности Земли или планет на спутниковые орбиты. Однако наибольшая эффективность использования метода имеет место при расчете достаточно коротких активных участков полета, например при проведении маневров уклонения КА от космического мусора, при реализации схода КА с орбиты и формировании требуемых условий входа в атмосферу, при осуществлении коррекций движения КА на атмосферном и внеатмосферном участках формирования спутниковых орбит. В этих случаях вычислительные погрешности достаточно малы и составляют сотые доли процента. Разработанные аналитические зависимости обеспечивают высокий уровень быстродействия расчетов и могут быть положены в основу при формировании бортовых алгоритмов управления КА.

Литература

1. Кувшинова, Е. Ю. Методика определения оптимальной траектории перелета с малой тягой между околоземной и около лунной орбитами / Е.Ю. Кувшинова // Труды МАИ. – 2013. – № 68. – С. 17.

2. Николаичев, И. А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов с двигателями малой тяги / И.А. Николаичев // Вестник МАИ. – 2013. – Т. 20. – № 5. – С. 66–76.

3. Понтилеев, А. В. Применение методов глобальной оптимизации для параметрического синтеза обобщенного пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора в задаче управления полетом / А.В. Понтилеев, Т.А. Летова, Е.А. Помазуева // Труды МАИ. – 2015. – № 79. – С. 23.

4. Иванов, Н. М. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет / Н.М. Иванов, А.И. Мартынов. – М.: Наука, 1985. – 384 с.

5. Соколов, Н. Л. Приближенный аналитический метод расчета пространственных маневров в атмосфере / Н.Л. Соколов // Космические исследования. – 1988. – Т. 26. – Вып. 2. – С. 209–219.

6. Расчет входа в атмосферу десантного модуля проекта «ЭкзоМарс» / К.С. Елкин [и др.] // Вестник МАИ. – 2014. – Т. 21. – № 4. – С. 79–86.

7. Баранов, А. А. Оценка маневров, выполненных активным космическим объектом / А.А. Баранов, М.О. Каратунов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». – 2015. – № 5 (104). – С. 25–37.

8. Соколов, Н. Л. Оптимальное управление космическим аппаратом на участке предварительного аэродинамического торможения при выведении на орбиту искусственного спутника Марса / Н.Л. Соколов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». – 2015. – № 6. – С. 4–21.

9. Соколов, Н. Л. Аналитический метод исследования оптимального управления КА при движении в атмосфере / Н.Л. Соколов // Лесной вестник. – 2015. – Т. 19. – № 3. С. 37–44.

10. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. 1980. – 976 с.

11. Chapman, D. R. An approximate analytical method for studing entry into planetary atmospheres / D.R. Chapman. – NASA, TN 4276 (May 1958).