

Прием псевдослучайных сигналов со смещенной частотой несущей в условиях помех, похожих на сигнал

Detection of pseudorandom signals with offset carrier frequency under conditions of interference similar to the signal

Биккенин / Bikkenin R.

Рафаэль Рифгатович

(tosir@sut.ru)

доктор технических наук, профессор,
заслуженный работник высшей школы РФ.

Военный институт дополнительного
профессионального образования (ВИ ДПО)
ВУНЦ ВМФ "Военно-морская академия имени
Адмирала Флота Советского Союза Н. Г. Кузнецова"
(ВМА им. Н. Г. Кузнецова) МО РФ,
доцент кафедры средств связи.

г. Санкт-Петербург

Андрюков / Andrukov A.

Алексей Анатольевич

(aaa260977@yandex.ru)

ВИ ДПО ВУНЦ ВМФ

ВМА им. Н. Г. Кузнецова МО РФ,

преподаватель кафедры средств связи.

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: смещение частоты несущей – carrier frequency offset; относительная фазовая модуляция второго порядка – differential phase-shift keying of second-order; ОФМ-2 – DDPSK; демодуляция – demodulation; помеха, похожая на сигнал – similar to signal interference; граница вероятности ошибки – error probability bound.

Предложена процедура автокорреляционного приема псевдослучайных сигналов с относительной фазовой модуляцией второго порядка в канале со смещением частоты несущей при воздействии помехи, похожей на сигнал. Найдена граница вероятности ошибки на основе неравенства Чернова, позволяющая оценить помехоустойчивость приема.

The procedure is proposed for autocorrelation detection of signals with second-order differential phase-shift keying in the channel with carrier frequency offset under action of interference similar to the signal. Error probability bound based on Chernov's inequality is found which permits to evaluate interference immunity of detection.

Введение

При связи с летательными аппаратами, а также в системах спутниковой (космической) связи одной из важнейших задач, которую приходится решать в первую очередь, является преодоление смещения несущей частоты сигнала (эффекта Доплера). Это в ряде ситуаций характерно также и для систем мобильной связи. К настоящему времени известен ряд работ, в которых

предложены пути преодоления частотной неопределенности на основе методов автоподстройки и нелинейной фильтрации [1–3]. Вместе с тем известны работы [4, 5], в которых для уменьшения негативного влияния эффекта Доплера при демодуляции предложено использовать сигналы с относительной фазовой модуляцией второго порядка (ОФМ-2), которая в иностранной литературе именуется Double differential phase shift keying (DDPSK). Такие сигналы обладают нечувствительностью к произвольным изменениям фазы, а также к произвольным изменениям частоты. Поэтому они могут успешно применяться в каналах космической радиосвязи и при обмене информацией с летательными аппаратами.

В настоящей работе, в развитие статьи, опубликованной в данном журнале в № 3 за 2015 г. [6], рассматривается процедура автокорреляционного приема псевдослучайных сигналов, формируемых методом ОФМ-2, которая решает двудеиную задачу – обработку в условиях смещений частоты несущей и дополнительно действия сигналоподобных организованных помех. Получены оценки для вероятности ошибочного приема и показано, что в названных условиях возможно обеспечить доставку информации абоненту, если помехи, похожие на сигнал, имеют над ним энергетическое превосходство, а собственные шумы приемника пренебрежимо малы.

Модели сигнала, помехи, процедуры демодуляции

Известно, что в отличие от относительной фазовой модуляции, где информация вкладывается в разность фаз двух соседних текущих посылок, в сигналах ОФМ-2

информация определяется значениями разностей второго порядка начальной фазы посылок сигнала. Иными словами, информационным параметром сигналов ОФМ-2 является разность между разностями фаз, которая определяется тремя последовательными посылками [4, 5].

Пусть частота колебания сигнала $\omega = 2\pi\ell/T$, ℓ – целое число, T – длительность элемента сигнала, изменилась на произвольную величину $\Delta\omega$. Тогда, если фаза $(k-1)$ -го элемента сигнала равна $(\varphi_{k-1} + \varphi_0)$, где φ_0 – начальная фаза, φ_{k-1} – информационная фаза, то при передаче k -го элемента его фаза уже будет равна $(\varphi_k + \varphi_0 + \Delta\omega T)$, а фаза $(k+1)$ -го элемента, соответственно, $-(\varphi_{k+1} + \varphi_0 + 2\Delta\omega T)$. Отсюда следует, что при относительной фазовой модуляции разности фаз [4]

$$\begin{aligned} \Delta^1\varphi_{k+1} &= \varphi_{k+1} - \varphi_k + \Delta\omega T, \\ \Delta^1\varphi_k &= \varphi_k - \varphi_{k-1} + \Delta\omega T \end{aligned}$$

не зависят от начальной фазы φ_0 , но имеют зависимость от сдвига частоты $\Delta\omega$. В отличие от этого при ОФМ-2 разность разностей фаз (вторая разность фаз) равна

$$\Delta^2\varphi_{k+1} = \Delta^1\varphi_{k+1} - \Delta^1\varphi_k = \varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}.$$

Видно, что в этом случае она зависит только от значений информационной фазы. То есть ОФМ-2 сигналы инвариантны (независимы) к начальной фазе и к смещению частоты колебания, что и определяет удобство их применения в каналах с эффектом Доплера.

Пусть на передающей стороне источником сообщений вырабатывается двоичная информационная последовательность символов $a_i \in \{0,1\}$, $t \in \{0,T\}$. Далее каждый символ «умножается» в n раз. В результате формируется последовательность

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_n \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_n \dots \underbrace{a_s a_s \dots a_s}_n \dots$$

каждый k -й, $k = \overline{1, n}$ элемент которой складывается с k -м элементом псевдослучайной последовательности (ПСП) $\gamma_k \in \{0,1\}$, $k = \overline{1, n}$. Наконец, в модуляторе в соответствии с правилом ОФМ-2 вырабатываются псевдослучайные сигналы, поступающие затем в канал связи:

$$S_i(t) = U_c \sum_{k=1}^n \pi_k(t) \text{rect}(t - (k-1)T) \sin[\omega t + \varphi_c(t)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где $\text{rect}(t - (k-1)T)$ – единичный импульс фиксированной длительности T , определяющий временной интервал посылки псевдослучайного (ПС) ОФМ-2 сигнала

$$\pi_k(t) = \begin{cases} (-1)^{\gamma_k}, & t \in [(k-1)T, kT], \quad k = \overline{1, n}, \\ 0, & t \notin [(k-1)T, kT], \end{cases}$$

$\varepsilon_k \in \{0,1\}$ – величина, связанная с γ_k следующими соотношениями, являющимися правилом формирования псевдослучайного ОФМ-2 сигнала $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} \oplus \Delta_k$, $\Delta_k = \Delta_{k-1} \oplus \gamma_k$, \oplus – знак сложения по модулю два, U_c , ω , $\varphi(t)$ – амплитуда, частота сигнала и его фазовый сдвиг, в общем случае учитывающий эффект Доплера.

Примем, что (1) соответствует информационному символу $a_i = 0$, тогда сигнал, соответствующий символу $a_i = 1$, должен быть сформирован на основе инверсии элементов псевдослучайной последовательности, т. е. $1 - \gamma_k$.

Организованную (преднамеренную) помеху будем полагать также колебанием с дискретной фазовой модуляцией, по параметрам (частоте, длительности посылок, границам тактовых интервалов) согласованную с сигналом. В этом случае помеху будем называть сигналоподобной. В [7] доказано, что именно такая помеха является оптимальной и оказывает наиболее чувствительное влияние на передаваемый сигнал.

Будем также полагать, что закон частотного смещения помехи совпадает с законом смещения частоты сигнала. Это возможно в случае, когда объект-постановщик помех движется по траектории, подобной движению летательного аппарата, с которого осуществляется передача информации. Данная ситуация соответствует наиболее тяжелым условиям радиосвязи, хотя в некоторой степени она идеализирована.

Помеху представим соотношением

$$N(t) = U_n \pi_n(t) \sin[\omega t + \varphi_n(t)], \quad (2)$$

где $\pi_n(t) = (-1)^{\delta_k}$, $\delta_k \in \{0,1\}$ – равновероятные и взаимонезависимые случайные величины, определяющие дискретную фазовую модуляцию помехи. Ясно, что они формируются «наугад», так как при выполнении определенных условий постановщик помехи лишен возможности знать закон формирования псевдослучайного сигнала.

Для обработки псевдослучайных ОФМ-2 сигналов в условиях смещения частоты несущего колебания и действия помех (2) можно применить автокорреляционный демодулятор, процедура принятия решения в котором записываются соотношением

$$\text{sign} \lambda = \text{sign} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{\gamma_k} \int_0^T u_k(t) u_{k-1}(t) dt \int_0^T u_{k-1}(t) u_{k-2}(t) dt + \int_0^T u_k(t) u_{k-1}^*(t) dt \int_0^T u_{k-1}(t) u_{k-2}^*(t) dt \right], \quad (3)$$

где $\text{sign} \lambda$ – реализует определение полярности величины в квадратных скобках, $u_k(t)$, $u_{k-1}(t)$, $u_{k-2}(t)$ – три последовательные во времени посылки, являющие смесью передаваемого сигнала и помехи, T – длительность посылки сигнала, «*» – знак комплексного сопряжения.

Если в (3) $\lambda > 0$, то считаем, что был передан информационный символ $a_i = 0$, в противном случае $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots$

Оценка вероятности ошибки на основе неравенства Чернова

Для нахождения вероятности ошибки определим вначале величину λ в (3). Учитывая (1) и (2), имеем

$$\begin{aligned} u_k(t) &= u_c(-1)^{\delta_k} \sin(\omega t + \varphi_c) + u_n(-1)^{\delta_k} \sin(\omega t + \varphi_n), \\ u_{k-1}(t) &= u_c(-1)^{\delta_{k-1}} \sin(\omega t + \varphi_c - \Delta\omega t) + \\ &\quad + u_n(-1)^{\delta_{k-1}} \sin(\omega t + \varphi_n - \Delta\omega t), \\ u_{k-2}(t) &= u_c(-1)^{\delta_{k-2}} \sin(\omega t + \varphi_c - 2\Delta\omega t) + \\ &\quad + u_n(-1)^{\delta_{k-2}} \sin(\omega t + \varphi_n - 2\Delta\omega t). \end{aligned}$$

После несложных преобразований и введения обозначений

$$a_k = (-1)^{\delta_k + \delta_k}, b_k = (-1)^{\delta_{k-1} + \delta_{k-1}}, c_k = (-1)^{\delta_{k-2} + \delta_{k-2}},$$

получим

$$\begin{aligned} \lambda_k &= q^2 + q \cos 2\theta + 2qa_k b_k + 2qb_k c_k + q\sqrt{q} \cos\theta(a_k + b_k + c_k) + \\ &+ 2\sqrt{q} \cos\theta a_k b_k c_k + \sqrt{q} \cos\theta(a_k + b_k) + q\sqrt{q} \cos(2\Delta\omega T - \theta) b_k + \\ &+ (q \cos 2\theta + 1) a_k c_k = q^2 + q \cos 2\theta + \lambda'_k, \end{aligned}$$

где $q = u_c^2 / u_n^2$, $\theta = \varphi_c - \varphi_n$ – разность фаз сигнала и помехи.

Учитывая, что a_k, b_k, c_k принимают значения равные ± 1 , так как $\gamma_k \in \{0, 1\}$, $\delta_k \in \{0, 1\}$, запишем

$$\lambda'_k = \begin{cases} q \cos 2\theta + 4q + 3q\sqrt{q} \cos\theta + 4\sqrt{q} \cos\theta + \\ + q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1, p = 1/8; \\ q \cos 2\theta - 4q + q\sqrt{q} \cos\theta - q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1, \\ p = 1/8; \\ q \cos 2\theta - 4q - q\sqrt{q} \cos\theta + q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1, \\ p = 1/8; \\ q \cos 2\theta + 4q - 3q\sqrt{q} \cos\theta - 4\sqrt{q} \cos\theta - q\sqrt{q} \cos(\theta - \\ - 2\Delta\omega T) + 1, p = 1/8; \\ -q \cos 2\theta + q\sqrt{q} \cos\theta - 2\sqrt{q} \cos\theta + q\sqrt{q} \cos(\theta - \\ - 2\Delta\omega T) - 1, p = 1/4 \\ -q \cos 2\theta - q\sqrt{q} \cos\theta + 2\sqrt{q} \cos\theta - q\sqrt{q} \cos(\theta - \\ - 2\Delta\omega T) - 1, p = 1/4 \end{cases}$$

Считаем, что передавался информационный символ $a_i = 0$, тогда вероятность ошибки в демодуляторе (3)

$$P_{\text{ош.}} = P\{\lambda < 0\} = P\left\{\sum_{k=1}^n \lambda'_k < -(q^2 + q \cos 2\theta)n\right\}.$$

В рассматриваемом случае для оценки вероятности ошибки воспользуемся экспоненциально точным неравенством Чернова [8, 9]

$$P_{\text{ош.}} = P\left\{\sum_{k=1}^n \lambda'_k < -(q^2 + q \cos 2\theta)n\right\} \leq \left(M\left\{e^{t(\lambda'_k + q^2 + q \cos 2\theta)}\right\}\right)^n,$$

где $t < 0$ – параметр, по которому осуществляется оптимизация оценки (4) и который является решением уравнения

$$M\{\lambda' e^{t\lambda'}\} / M\{e^{t\lambda'}\} = -(q^2 + q \cos 2\theta).$$

После подстановки величины $\lambda' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k$ в (4) получим

$$\begin{aligned} P_{\text{ош.}} \leq & \left[\frac{1}{8}\left\{\exp\left[t(q^2 + 2q \cos 2\theta + 4q + 3q\sqrt{q} \cos\theta + 4\sqrt{q} \cos\theta + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.+ q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1\right)\right] + \frac{1}{8}\left\{\exp\left[t(q^2 + 2q \cos 2\theta - 4q + \right.\right. \\ & \left.+ q\sqrt{q} \cos\theta - q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1\right)\right] + \frac{1}{8}\left\{\exp\left[t(q^2 + 2q \cos 2\theta - \right.\right. \\ & \left.- 4q - q\sqrt{q} \cos\theta + q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1\right)\right] + \\ & + \frac{1}{8}\left\{\exp\left[t(q^2 + 2q \cos 2\theta + 4q - 3q\sqrt{q} \cos\theta - 4\sqrt{q} \cos\theta - \right.\right. \\ & \left.- q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) + 1\right)\right] + \frac{1}{4}\left\{\exp\left[t(q^2 + q\sqrt{q} \cos\theta - \right.\right. \\ & \left.- 2\sqrt{q} \cos\theta + q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) - 1\right)\right] + \frac{1}{4}\left\{\exp\left[t(q^2 - q\sqrt{q} \cos\theta + \right.\right. \\ & \left.+ 2\sqrt{q} \cos\theta - q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T) - 1\right)\right]\}^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Упростим данное соотношение путем усреднения по различным значениям разности фаз сигнала и помех θ , а также по случайной величине смещения частоты несущей $\Delta\omega$. С этой целью воспользуемся методом моментных пространств [9, 10], в основе которого лежит теорема, позволяющая в определенных ситуациях сложные аналитические преобразования интерпретировать путем наглядных геометрических представлений.

Теорема [10]. Пусть z – случайная величина с некоторой функцией распределения вероятностей $G(z)$ определена на конечном интервале $I = [a, b]$, где также заданы две непрерывные функции $K_1(z)$ и $K_2(z)$. Обобщенным моментом случайной величины z , который индуцирован функцией $K_i(z)$, называется значение

$$m_i = M\{K_i(z)\} = \int_a^b K_i(z) dG(z), i = 1, 2.$$

Тогда моментным пространством M в двумерном пространстве Евклида R_2 будет замкнутое, ограниченное и выпуклое множество векторов

$$M\left\{m = (m_1, m_2) \in R_2 \mid m_i = \int_a^b K_i(z) dG(z), i = 1, 2\right\}.$$

Пусть L – кривая $r = (r_1, r_2)$ в пространстве R_2 , задаваемая в виде $r_1 = K_1(z)$, $z \in L$, а C – выпуклая оболочка кривой L . В этом случае данная оболочка будет совпадать с моментным пространством $C = M$.

Представленная теорема позволяет сравнительно легко определить границы для моментов $m_2 = M\{K_2(z)\}$ непосредственное вычисление которых связано со значительными трудностями. Для этого должен достаточно просто находиться другой момент $m_1 = M\{K_1(z)\}$. В качестве функций, для которых несложно вычислить m_1 , обычно выбирают степенные, экспоненциальные и некоторые другие. Тогда, имея информацию о конкретных значениях функций $K_1(z)$, можно построить выпуклую оболочку на интервале $I = [a, b]$. Затем определяются верхняя и нижняя границы момента $m_2 = M\{K_2(z)\}$ как точки пересечения оболочки некоторой вертикальной прямой, проходящей через известное значение $m_1 = M\{K_1(z)\}$.

Зададим теперь $z = q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T)$, выбрав данное значение в (5), и рассмотрим моменты $M\{K_1(z)\} = M\{z\}$ и $M\{K_2(z)\} = M\{z^2\}$. С этой целью построим выпуклую оболочку, которая в соответствии с теоремой [10] совпадает с моментным пространством.

На рис. 1 показано, что нижняя граница выпуклой оболочки совпадает с моментом $M\{K_2(z)\}$, а верхняя граница – прямая линия, которую можно задать посредством известного уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. В данном случае оно имеет вид:

$$\frac{M\{K_2(z)\} + q\sqrt{q}}{2q\sqrt{q}} = \frac{M\{K_2(z)\} - \exp(-q\sqrt{q})}{\exp(q\sqrt{q}) - \exp(-q\sqrt{q})}. \quad (6)$$

В (6) $M\{K_1(z)\} = M\{q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T)\} = 0$, поскольку фаза $\theta = \varphi_c - \varphi_n$ является случайной и равномерно распределенной на интервале от 0 до

2π , смещение частоты несущей $\Delta\omega$ также носит случайный характер. Тогда верхняя граница момента $M\{K_2(z)\} = M\{\exp(q\sqrt{q} \cos(\theta - 2\Delta\omega T))\}$ будет являться решением уравнения (6) для точки пересечения прямой линии с осью координат (рис. 1):

$$M\{K_2(z)\} \leq \frac{\exp(2q\sqrt{q}) + 1}{2\exp(q\sqrt{q})}. \quad (7)$$

Далее, имеем ввиду $\sqrt{q} > 0$, тогда величина $\exp(2q\sqrt{q}) > 1$ и, следовательно, $M\{K_2(z)\} \leq \exp(q\sqrt{q})$. Аналогичным образом можно провести усреднение остальных компонент в (5) по фазе $\theta = \varphi_c - \varphi_n$.

Таким образом, окончательно получим верхнюю граничную оценку для вероятности ошибки при смещениях частоты несущей и сигналоподобных организованных помехах, воздействующих на псевдослучайный ОФМ-2 сигнал

$$P_{\text{ош.}} \leq \left[\frac{1}{8} \left\{ \exp \left[t \left(4\sqrt{q} (q + \sqrt{q} + 1) + (q + 1)^2 \right) \right] \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \exp \left[t (q - 1)^2 \right] \right\} + \frac{1}{8} \left\{ \exp \left[t \left(-4\sqrt{q} (q - \sqrt{q} + 1) + (q + 1)^2 \right) \right] \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \exp \left[t (\sqrt{q} + 1)^2 (q - 1) \right] \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \exp \left[t (\sqrt{q} - 1)^2 (q - 1) \right] \right\} \right]^n, \quad (8)$$

где q – отношение мощностей сигнала и помехи на длительности одной посылки, n – база псевдослучайного ОФМ-2 сигнала, t – параметр, по которому производится оптимизация с помощью ЭВМ.

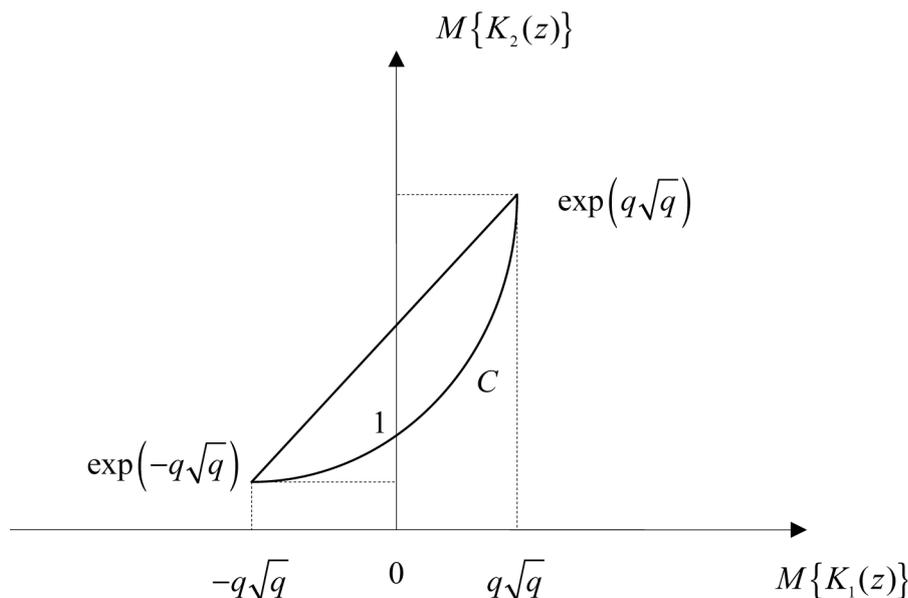


Рис. 1. Выпуклая оболочка C

Имея в виду псевдослучайный характер преобразований при обработке ОФМ-2 сигнала в демодуляторе, можно получить расчетное соотношение для вероятности ошибки на основе гауссовского приближения. Нетрудно показать, что в случае, когда разность фаз сигнала и помехи $\theta = \varphi_c - \varphi_n = 0$, моментные характеристики величины λ – математическое ожидание и дисперсия в соотношении (3) имеют вид

$$M\{\lambda\} = qn(1+q), \quad D\{\lambda\} = n(1+8q+13q^2+6q^3).$$

Тогда вероятность ошибки можно оценить выражением

$$P_{\text{ош}} \approx 1 - F\left(\left[\frac{(1+q)^2 q^2 n}{1+8q+13q^2+6q^3}\right]^{1/2}\right), \quad (9)$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – интеграл вероятностей.

Результаты вычислений по соотношениям (8) и (9) оценок вероятностей ошибочного приема псевдослучайного ОФМ-2 сигнала для базы $n = 100$ в виде графи-

ческих зависимостей от величины отношения сигнал/помеха $q \leq 1$ представлены на рис. 2.

Расчеты показывают, что при использовании автокорреляционной обработки псевдослучайных ОФМ-2 сигналов оказывается возможным обеспечить уверенный прием информации в каналах связи с летательными аппаратами, в которых имеются два негативных фактора: смещение частоты несущей вследствие эффекта Доплера и действие сигналоподобных организованных (преднамеренных) помех с энергетикой, превосходящей передаваемый сигнал. Так, при помехе, вдвое превышающей по мощности сигнал, когда $q = P_c/P_n = 0,5$ и базе псевдослучайного ОФМ-2 сигнала $n = 100$ при вычислениях по (9) вероятность ошибочного приема $P_{\text{ош}} \approx 6,21 \cdot 10^{-3}$. Вычисления по (8) при тех же параметрах канала передачи информации дают верхнюю граничную оценку вероятности ошибки $P_{\text{ош}} \leq 2,1 \cdot 10^{-2}$, что практически на половину порядка хуже предыдущего значения $P_{\text{ош}}$. Тем не менее оценка (8) может быть полезной, поскольку она найдена без учета гауссовского приближения и является экспоненциально точной [8, 9].

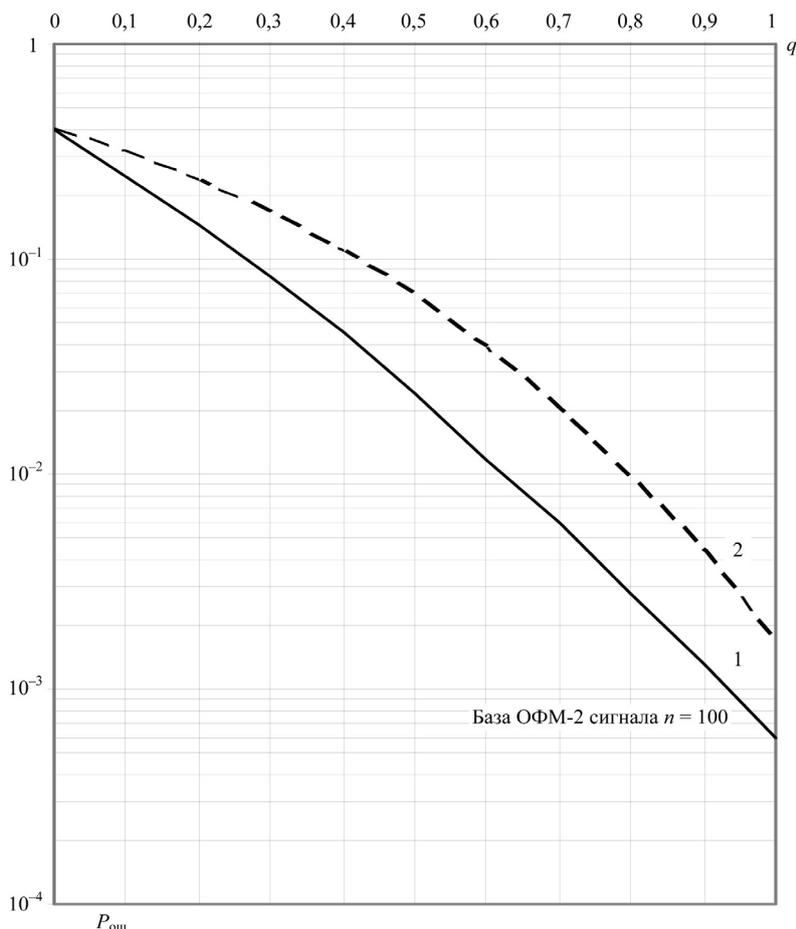


Рис. 2. Оценки вероятностей ошибочного приема псевдослучайного ОФМ-2 сигнала с базой $n = 100$ (1–гауссовская; 2–граница Чернова)

Чтобы повысить эффект уверенности приема в названных выше сложных условиях передачи информации потребуется увеличить базу псевдослучайного ОФМ-2 сигнала, что приведет к некоторому снижению скорости передачи сообщений. Ясно, что это может быть естественной «платой» за гарантированную возможность доставки важной информации в сложных условиях ее передачи в каналах связи с летательными аппаратами, в том числе использующих искусственные спутники Земли. Полученные соотношения целесообразно использовать на этапе проектирования техники передачи данных до проведения дорогостоящих трассовых испытаний.

Литература

1. Тихонов, В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. – 34 с.
2. Чесноков, М. Н. Современные методы приема цифровых сигналов в линиях радиосвязи / М.Н. Чесноков. – Л.: ВАС, 1988. – 192 с.
3. Бутырский, Е. Ю. Структура оптимального алгоритма фильтрации пространственно-временных сигналов / Е.Ю. Бутырский // Информация и Космос. – 2014. – № 4. – С. 16–23.
4. Окунев, Ю. Б. Цифровая передача информации фазоманипулированными сигналами / Ю.Б. Окунев. – М.: Радио и связь. 1991. – 296 с.
5. Van Alphen, D. K. Higher-order differential phase-shift keyed modulation / D.K. Van Alphen, W.C. Lindsey // IEEE Trans. Commun. – April 1994. – Vol. 42. – P. 440–448.
6. Биккенин, Р. Р. Оценка эффективности обработки шумоподобных сигналов с относительной фазовой модуляцией на удлиненном интервале в условиях наихудших помех / Р.Р. Биккенин, А.А. Андрюков // Информация и Космос. – 2015. – № 3. – С. 6–12.
7. Агафонов, А. А. Методология и результаты синтеза и оценки преднамеренных помех приемникам дискретных сигналов / А.А. Агафонов, К.Ю. Ложкин, В.Н. Поддубный // Радиотехника и электроника. – 2013. – Т. 48. – № 8. – С. 956–962.
8. Возенкрафт, Дж. Теоретические основы техники связи / Дж. Возенкрафт, И. Джекобс. – М.: Мир, 1969. – 640 с.
9. Коржик, В. И. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник / В. И. Коржик, Л. М. Финк, К. Н. Шелкунов. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.
10. Kung, Yao. Quadratic – Exponential Moment Error Bounds for Digital Communications Systems / Yao Kung // Journal of the Franklin Institute. – 1980. – Vol. 310. – No. 6. – P. 365–371.