Модель мультимедийного трафика, использующая многомерные плотности распределения вероятности наблюдаемых состояний

Multimedia traffic model using multidimensional probability distribution density of observations

Баранов / Baranov V.
Владимир Александрович
(baranov.va@mail.ru)
доктор технических наук, доцент.
ГКОУ ВПО «Академия Федеральной службы охраны РФ» (Академия ФСО РФ),
сотрудник.
г. Орел

Крюков / Kriukov O.
Олег Витальевич
(oleghooker@gmail.com)
кандидат технических наук, доцент.
Академия ФСО РФ,
сотрудник.
г. Орел

Щербаков / Scherbakov V.
Виталий Сергеевич
(vs.letter@gmail.com)
Академия ФСО РФ,
сотрудник.
г. Орел

Ключевые слова: система видеоконференцсвязи – videoconference system; многомерные случайные наблюдения – multidimensional stochastic observations; гауссовская плотность распределения – Gaussian density distribution; скрытая Марковская модель – hidden Markov model.

В статье представлен анализ статистических характеристик источников, используемых в системе видеоконференцсвязи. Выявлено наличие зависимости между типами источника информации в сеансах видеоконференцсвязи и характеристиками трафика. Для описания сложной формы полученных полигонов частот предложена модель конечной смеси вероятностных распределений. Для описания взаимосвязи между типами источника и наблюдаемыми статистическими характеристиками трафика видеосвязи использован аппарат скрытых марковских моделей (СММ). Расширен аппарат СММ, введена СММ с несколькими наблюдениями.

The statistical characteristics analysis of sources used in videoconferencing system is given. Dependence between information source types in a video conference session and traffic characteristics is revealed. A model of finite density distributions mixture is suggested to describe complicated form of frequency diagram. For the description of interrelation between source types and observed traffic statistical characteristics of video conference the hidden Markov model (HMM) apparatus is used. The HMM apparatus is expanded; HMM with several observations is introduced.

На сегодняшний день наибольшее распространение в инфокоммуникационных сетях получили системы видеоконференцсвязи (ВКС), построенные на основе рекомендации H.323 "Системы мультимедийной связи на основе пакетной передачи". В этих системах активно применяется технология People + Content, позволяющая пользователям сопровождать доклады презентациями, организовывать совместную дистанционную интерактивную работу над документами и т.д. Большинство современных оконечных терминалов поддерживает рекомендацию H.239, в соответствии с которой осуществляется одновременная передача нескольких видеопотоков. Один из них предназначен для мультимедийной информации, другой – для документальной. Кроме того, системы ВКС находят применение для трансляции видеоизображений с мест событий в случаях возникновения каких-то происшествий. При этом используются профессиональные камеры, передающие видео высокого разрешения с большой кадровой скоростью.

Исходя из анализа условий функционирования, особенностей применения и режимов работы современных систем ВКС выделим 3 типа источника видеоинформации, циркулирующих в них:

– "говорящая голова" – характеризуется небольшой динамикой изображения;

– видео с профессиональной камеры – характеризуется большой динамикой, а также большим разрешением видеоизображения;

– контент – характеризуется высоким разрешением, но менее критичен к задержкам.

Опираясь на результаты, полученные в работе [1], выдвинем гипотезу о том, что выделенные ранее типы источников видеоинформации однозначно определяются с помощью создаваемого ими трафика. Отличительными признаками, характеризующими каждый тип, являются значения размеров пакетов и интервалов времени между их поступлением.

На основании статистических данных, собранных в рамках проведенного эксперимента, были получены полигоны частот размеров пакетов и интервалов времени между их поступлением для каждого из рассматриваемых типов источников (рисунки 1, 2, 3). Размерность каждой выборки составила около 60 тысяч пакетов.

Анализ полученных статистических зависимостей, представленных графиками на рис. 1–3, подтвердил ранее выдвинутую гипотезу о наличии взаимосвязи между типами источника информации в сеансах ВКС и характеристиками создаваемого ими трафика. Необходимо отметить, что плотности распределения размеров пакетов и интервалов времени между их поступлением для всех типов источников, аппроксимирующие представленные полигоны частот, имеют сложные формы и, как правило, не описываются каким-либо известным законом распределения.

В связи с этим для описания плотностей распределения воспользуемся моделью конечной смеси вероятностных распределений. Такой тип моделей предложен в работах [2, 3], в соответствии с которыми любая сложная плотность распределения представляется суммой простых компонент, описываемых известными законами:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} w_i \psi(x; \vartheta_i). \quad (1)$$

Здесь K – количество компонент смеси; w_i – весовой коэффициент i-й компоненты смеси, $w_i \geq 0$; $\psi(x; \vartheta_i)$ – i-я компонента смеси, представляющая собой известную плотность распределения, причем все компоненты принадлежат к одному семейству распределений; ϑ_i – вектор параметров распределения i-й компоненты смеси.

Весовые коэффициенты обладают следующим свойством:

$$\sum_{i=1}^{K} w_i = 1. \quad (2)$$

В качестве компонент смеси будем использовать гауссовскую (нормальную) плотность распределения, параметрами которой являются математическое ожидание и дисперсия. Поэтому i-я компонента смеси определяется формулой:

$$\psi(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i}}. \quad (3)$$

Здесь $\vartheta_i = \{\mu_i, \sigma_i^2\}$; μ_i – математическое ожидание i-й компоненты смеси; σ_i^2 – дисперсия i-й компоненты смеси.

Тогда выражение, описывающее сложную плотность распределения в виде суммы нормальных компонент, примет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} w \psi(x; \mu_i; \sigma_i). \quad (4)$$

Для аппроксимации полученных в ходе эксперимента полигонов частот смесью нормальных распределений определим параметры (математическое ожидание и дисперсию) каждой компоненты смеси. Иначе разделим имеющиеся смеси, представленные в виде полигонов частот, на составляющие, каждая из которых описы-

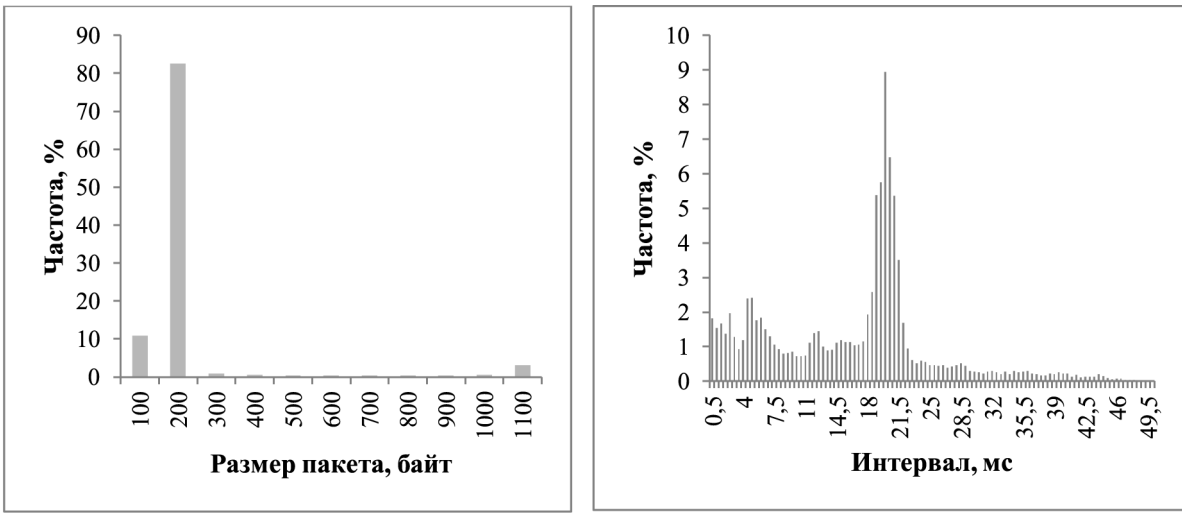

Рис. 1. Полигоны частот характеристик типа источника "говорящая голова"

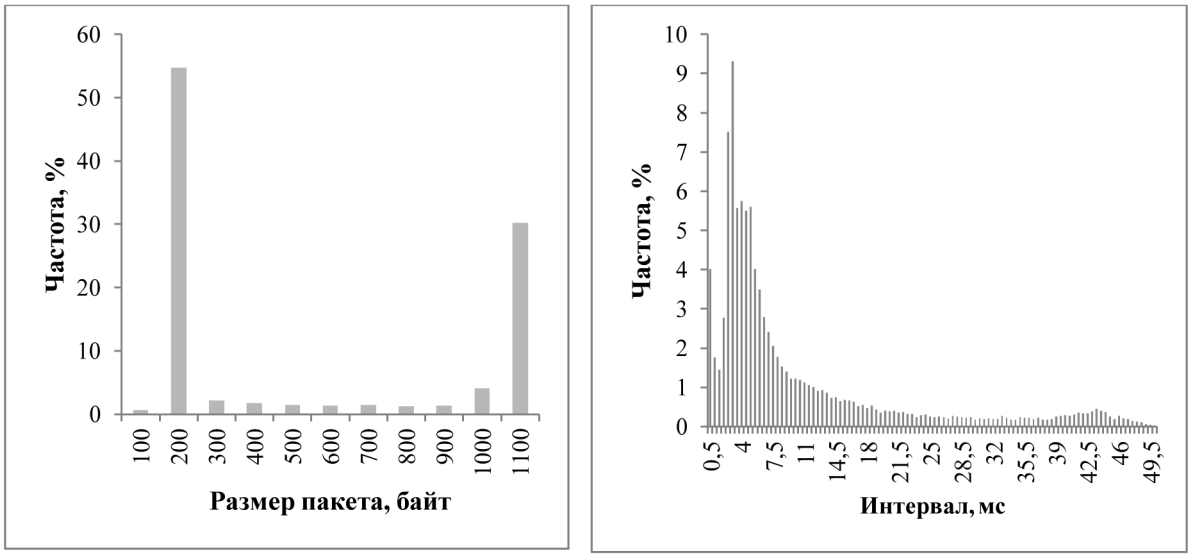

Рис. 2. Полигоны частот характеристик типа источника "профессиональная камера"

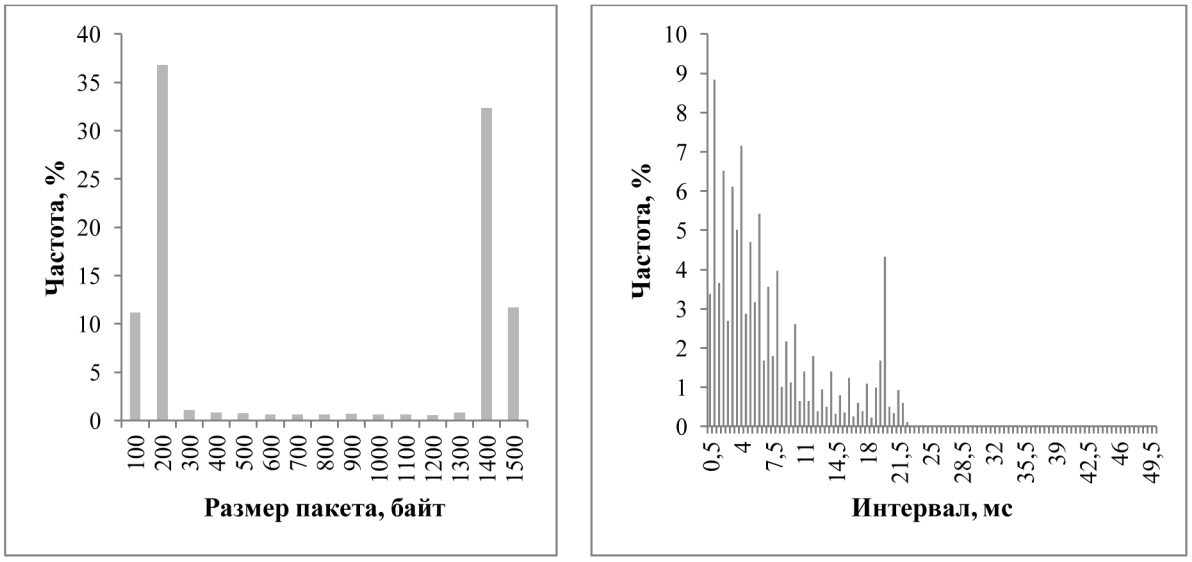

Рис. 3. Полигоны частот характеристик типа источника "контент"

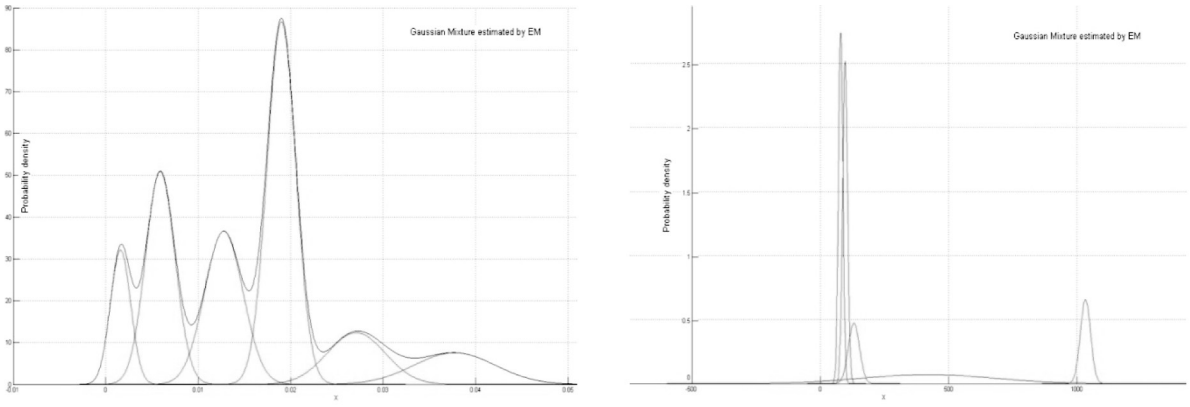

Рис. 4. Аппроксимация характеристик типа источника "говорящая голова" шестью компонентами нормального распределения в среде Matlab

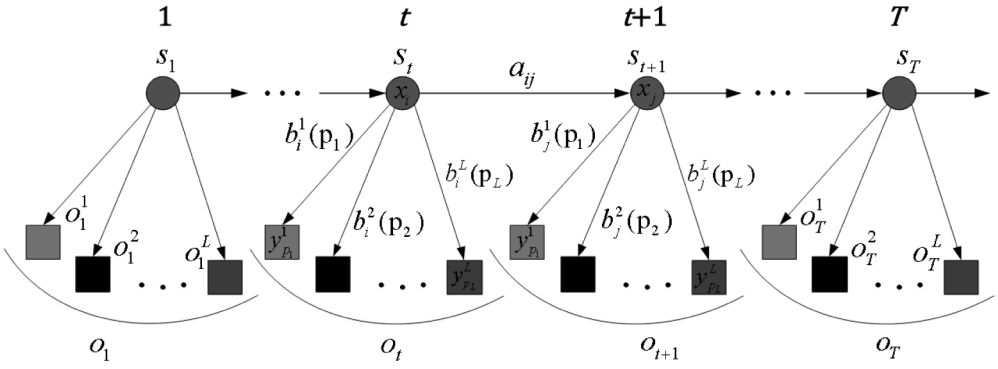

Рис. 5. Скрытая Марковская модель с несколькими наблюдениями

вается нормальным законом со своими параметрами и весом. С целью решения сформулированной задачи используем алгоритмы EM-типа (EM, SEM, MCEM-алгоритмы и их модификации) [4]. Однако в качестве исходных данных для таких алгоритмов требуется заданное количество компонент смеси. Это число определяется одним из возможных способов, описанных в [10–12]. В рамках данной работы для описания плотностей распределений, аппроксимирующих полученные в ходе эксперимента полигоны частот, количество компонент смеси будем определять визуально.

Пример аппроксимации полигона размеров пакетов и интервалов между их поступлением для типа источника "говорящая голова" (рис. 1), выполненный в среде Matlab для шести компонент, представлен на рис. 4.

Для описания взаимосвязи между типами источника и наблюдаемыми статистическими характеристиками трафика видеосвязи воспользуемся аппаратом скрытых марковских моделей [6]. При этом под скрытыми состояниями в рассматриваемом случае будем понимать тип источника ("говорящая голова", профессиональная камера, контент), а под наблюдениями, характеризующими состояния, – значения размеров пакетов и интервалы времени между их поступлением.

Заметим, что существенным ограничением классической СММ является тот факт, что в любой момент времени скрытому состоянию соответствует только одно наблюдение.

Поэтому предлагаем расширить классическую СММ, дополнив ее L наблюдениями (рис. 5). Основанием для этого является тот факт, что в рассматриваемом случае, а также во многих практических приложениях, каждое скрытое состояние может порождать несколько характеризующих его наблюдений, которые позволяют делать более точные предположения о последовательности скрытых состояний в цепи Маркова.

Выдвинем гипотезу, что анализируя несколько зависимых или независимых наблюдений, характеризующих

исходный процесс, становится возможным получить состоятельные, несмещенные, эффективные оценки скрытых состояний на коротких временных рядах.

Рассмотрим СММ с несколькими наблюдениями, представленными непрерывными случайными процессами.

В классической СММ непрерывные наблюдения задаются множеством плотностей распределений наблюдаемой величины для каждого скрытого состояния $B=\{b_1(y),b_2(y),\ldots,b_N(y)\}$. В СММ с несколькими непрерывными наблюдениями таких множеств плотностей распределений для каждого скрытого состояния также несколько (определяется количеством наблюдений L). Соответственно, наблюдения в таких СММ следует задавать совокупностью множеств плотностей распределений для каждого скрытого состояния $B=\{B_1,B_2,\ldots,B_N\}$. Здесь $B_i=\{b_i^1(y^1),b_i^2(y^2),\ldots,b_i^L(y^L)\}$ – множество плотностей распределений наблюдаемых величины для i-го скрытого состояния, где $b_i^l(y^l)$ – плотность распределения l-го наблюдения для i-го скрытого состояния; y^l – l-е наблюдение; L – количество наблюдений, характеризующих скрытые состояния.

Однако задание наблюдений в СММ с несколькими наблюдениями в виде совокупности множеств плотностей распределений является неприменимым при решении трех основных проблем СММ [6].

Сформулированное замечание обусловливает необходимость иного способа определения наблюдений. Предлагаем представить наблюдения в виде множества L-мерных плотностей распределения $B=\{B_1,B_2,\ldots,B_N\}$, соответствующих каждому скрытому состоянию, где $B_i(y_1,y_2,\ldots,y_L)$ – L-мерная плотность распределения системы наблюдаемых величин $y_1,y_2,\ldots,y_L$ для i-го скрытого состояния.

Тогда для задания СММ с несколькими наблюдениями необходимо указать матрицу вероятностей переходов между скрытыми состояниями A, множество L-мерных плотностей распределения $B=\{B_1,B_2,\ldots,B_N\}$, соответствующих скрытым состояниям, и вектор начального распределения вероятностей скрытых состояний π. СММ с L наблюдениями будем обозначать λ^L. Модель λ^L определяется выражением:

$$\lambda^L=(A,\{B_1,B_2,\ldots,B_N\},\pi). \tag{5}$$

Здесь N – число скрытых состояний СММ; A – матрица вероятностей переходов между скрытыми состояниями; $\{B_1,B_2,\ldots,B_N\}$ – множество L-мерных плотностей распределения наблюдений, соответствующих скрытым состояниям; $B_i=B_i(y_1,y_2,\ldots,y_L)$ – L-мерная плотность вероятности распределения системы наблюдаемых величин $y_1,y_2,\ldots,y_L$ для i-го скрытого состояния; π – вектор начального распределения вероятностей скрытых состояний.

Представленный выше способ задания наблюдений не отвечает на вопрос, каким образом использовать предложенную модель (5) при решении трех основных проблем СММ.

Получим аналитическое выражение, описывающее плотность распределения $B_i(y_1,y_2,\ldots,y_L)$ для i-го скрытого состояния. Рассмотрим случай, когда наблюдения представлены независимыми случайными процессами. Тогда в соответствии с [5] L-мерную плотность распределения системы следует задавать как произведение одномерных плотностей наблюдаемых величин $y_1,y_2,\ldots,y_L$:

$$B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)=b_i^1(y^1)\cdot b_i^2(y^2)\cdot\ldots\cdot b_i^L(y^L). \tag{6}$$

Учитывая, что плотность распределения каждого наблюдения аппроксимируется моделью конечной смеси гауссовских распределений (4), перепишем (6) в виде

$$B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)=\sum_{k_1=1}^{K_1} w_i^{1,k_1}\psi(y^1;\mu_i^{1,k_1},(\sigma_i^{1,k_1})^2)\times\sum_{k_2=1}^{K_2} w_i^{2,k_2}\psi(y^2;\mu_i^{2,k_2},(\sigma_i^{2,k_2})^2)\times\ldots$$
$$\times\sum_{k_L=1}^{K_L} w_i^{L,k_L}\psi(y^L;\mu_i^{L,k_L},(\sigma_i^{L,k_L})^2) \tag{7}$$

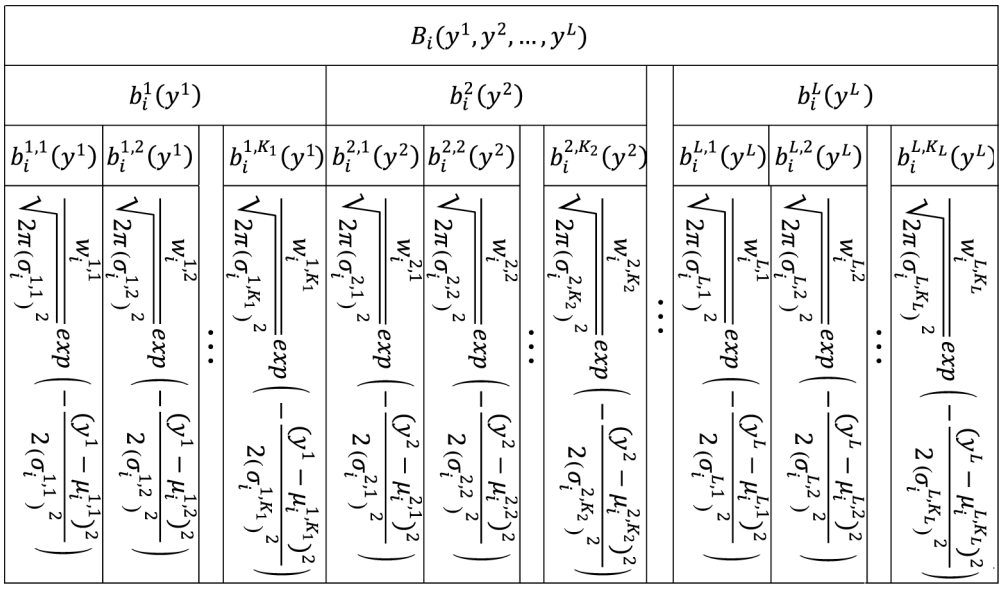

Рис. 6. Состав плотности распределения системы наблюдений для i-го состояния

Взаимосвязь плотности распределения системы наблюдений $B_i(y^1,y^2,...,y^L)$ для i-го состояния плотностей распределения отдельных наблюдений и компонент гауссовского (нормального) распределения, аппроксимирующих эти плотности, представлена на рис. 6.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся следующим свойством

$$\sum_{k_1=1}^{K_1} x_{k_1}{}^1 \cdot \sum_{k_2=1}^{K_2} x_{k_2}{}^2 = \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2} x_{k_1}{}^1 x_{k_2}{}^2. \qquad (8)$$

Распространим свойство (8) на произведение L сумм:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1} x_{k_1}{}^1 \cdot \sum_{k_2=1}^{K_2} x_{k_2}{}^2 \cdot \ldots \cdot \sum_{k_L=1}^{K_L} x_{k_L}{}^L = \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} x_{k_1}{}^1 x_{k_2}{}^2 \ldots x_{k_L}{}^L \qquad (9)$$

Воспользовавшись свойством (9) для преобразования произведения (7), получим:

$$B_i(y^1,y^2,...,y^L) = \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} w_i^{1,k_1}\,\psi(y^1;\mu_i^{1,k_1},(\sigma_i^{1,k_1})^2)\times$$
$$\times\, w_i^{2,k_2}\,\psi(y^2;\mu_i^{2,k_2},\sigma_i^{2,k_2})^2)\cdot\ldots\cdot w_i^{L,k_L}\,\psi+\sigma_i^{L,k_L})^2) =$$
$$= \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} w_i^{1,k_1}\cdot w_i^{2,k_2}\cdot\ldots\cdot w_i^{L,k_L}\cdot\psi\,(y^1;\mu_i^{1,k_1},(\sigma_i^{1,k_1})^2)\times$$
$$\times\,\psi\,(y^2;\mu_i^{2,k_2},(\sigma_i^{2,k_2})^2)\cdot\ldots\cdot\psi\,(y^L;\mu_i^{L,k_L},(\sigma_i^{L,k_L})^2). \qquad (10)$$

Переписав (10) в более компактном виде, получим:

$$B_i\,(y^1,y^2,\ldots,y^L) = \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L}\Big(\prod_{l=1}^{L} w_i^{l,k_l}\cdot\prod_{l=1}^{L}\psi(y^l;\mu_i^{l,k_l}(\sigma_i^{l,k_l})^2)\Big). \qquad (11)$$

Произведение $\prod_{l=1}^{L}\psi(y^l;\mu_i^{l,k_l},(\sigma_i^{l,k_l})^2)$ в выражении (11) является гауссовской (нормальной) плотностью распределения в L-мерном пространстве, представленной в виде произведения одномерных нормальных распределений. Обозначим:

$$\prod_{l=1}^{L}\psi(y^l;\mu_i^{l,k_l},(\sigma_i^{l,k_l})^2) = \psi_i(y^1,y^2,...y^L;k_1,k_2,\ldots,k_L), \qquad (12)$$

где $\psi_i(y^1,y^2,...y^L;k_1,k_2,\ldots,k_L)$ – компонента L-мерной плотности распределения системы наблюдений СММ для i-го скрытого состояния. Выражение (12) получено при условии независимости случайных величин, характеризующих наблюдения.

Рассмотрим ситуацию, при которой наблюдения являются зависимыми, коррелированными случайными величинами. В этом случае (для СММ с двумя наблюдениями) компонента двухмерной плотности $\psi_i(y^1,y^2;k_1,k_2)$ рассчитывается с учетом коэффициента корреляции. Используя представленное в работе [5] выражение, зададим $\psi_i(y^1,y^2;k_1,k_2)$ формулой:

$$\psi_i(y^1,y^2;k_1,k_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^{1,k_1}\,\sigma_i^{2,k_2}\,\sqrt{1-(r)^2}}\times$$
$$\times\; e^{\frac{1}{2(1-r)^2)}\left(\frac{(y^1-\mu_i^{1,k1})^2}{(\sigma_i^{1,k_1})^2}-\frac{2r(y^1-\mu_i^{1,k_1})}{\sigma_i^{1,k_1}\,\sigma^{2,k_2}}+\frac{(y^2-\mu_i^{2,k_2})^2}{(\sigma^{2,k_2})^2}\right)}, \qquad (13)$$

где r – коэффициент корреляции последовательностей наблюдений y^1 и y^2.

Произведение $\prod_{l=1}^{L} w_i^{l,k_l}$ в формуле (11) представляет собой весовой коэффициент соответствующей компоненты L-мерной плотности распределения. Введем следующее обозначение:

$$\prod_{l=1}^{L} W_i^{l,k_l} = W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L), \qquad (14)$$

где $W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L)$ – весовой коэффициент соответствующей компоненты L-мерной плотности распределения системы наблюдений СММ для i-го скрытого состояния.

Весовые коэффициенты компонент L-мерной плотности должны обладать следующим свойством, сформулируем его в виде утверждения:

Утверждение 1. Сумма весовых коэффициентов компонент L-мерной плотности распределения системы наблюдений СММ равна 1:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L) = 1 \qquad (15)$$

Докажем это утверждение. Для этого проведем следующие преобразования:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L) = \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L}\prod_{l=1}^{L} w_i^{1,k_1} =$$
$$= \sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L}(w_i^{1,k_1}\cdot w_i^{2,k_2}\cdot\ldots\cdot w_i^{L,k_L}). \qquad (16)$$

Воспользовавшись свойством (9) получим:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L) =$$
$$\sum_{k_1=1}^{K_1} w_i^{1,k_1}\cdot\sum_{k_2=1}^{K_2} w_i^{2,k_2}\cdot\ldots\cdot\sum_{k_L=1}^{K_L} w_i^{L,k_L}. \qquad (17)$$

Сумма $\sum_{k_l=1}^{K_l} w_i^{l,k_l}$

является суммой весовых коэффициентов l-й компоненты смеси распределений, аппроксимирующей плотность вероятности наблюдения y^l. В соответствии с (2) эта сумма равна 1. Следовательно:

$$\sum_{k_1=1}^{K_1}\sum_{k_2=1}^{K_2}\ldots\sum_{k_L=1}^{K_L} W_i(k^1,k^2,\ldots,k^L) = 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1. \qquad (18)$$

Утверждение 1 доказано.

В соответствии с работой [5] плотность распределения должна обладать двумя основными свойствами:

– плотность распределения есть неотрицательная функция;

– интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен 1.

Покажем, что формируемые представленным выше способом L-мерные плотности распределения обладают указанными свойствами.

Утверждение 2. L-мерная плотность распределения системы наблюдений $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)$ для каждого i-го скрытого состояния является неотрицательной функцией:

$$B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)\geq 0. \qquad (19)$$

Докажем утверждение (19). В соответствии с (6) плотность распределения системы наблюдений $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)$ представляет собой произведение плотностей распределения всех наблюдений для i-го скрытого состояния. Каждая из этих L плотностей является одномерной гауссовской (нормальной) плотностью распределения, которая в соответствии с [5] является неотрицательной, то есть:

$$b_i(y^1)\geq 0. \qquad (20)$$

Так как произведение неотрицательных множителей также является неотрицательным, то плотность распределения системы наблюдений $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)\geq 0$. Утверждение 2 доказано.

Физический смысл утверждения 2 (19) заключается в следующем. Вся L-мерная поверхность, описываемая плотностью распределения $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)$ системы наблюдений СММ для i-го скрытого состояния, расположена не ниже L-мерной плоскости $y^1,y^2,\ldots,y^L$.

Утверждение 3. L-кратный интеграл L-мерной плотности распределения системы наблюдений СММ для i-го скрытого состояния в пределах от $-\infty$ до ∞ равен 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)\,dy^1,dy^2,\ldots,dy^L = 1. \qquad (21)$$

Докажем утверждение (21). Воспользовавшись формулой (6) получим следующий L-кратный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} b_i^1(y^1)\cdot b_i^2(y^2)\cdot\ldots\cdot b_i^L(y^L)dy^1\,dy^2\ldots dy^L. \qquad (22)$$

Так как функция $b_i^l(y^l)$ – одномерная гауссовская (нормальная) плотность распределения, то она является непрерывной на интервале $(-\infty;\infty)$. Тогда функция $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)$ также является непрерывной на неограниченной L-мерной плоскости. В соответствии с утверждением (19) функция $B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)$ – неотрицательна. Таким образом, в соответствии с [8, 9] L-кратный интеграл (22) может быть заменен повторным, тогда выражение (22) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy^1\int_{-\infty}^{\infty} dy^2\ldots\int_{-\infty}^{\infty} b_i^1(y^1)\cdot b_i^2(y^2)\cdot\ldots\cdot b_i^L(y^L)dy^L. \qquad (23)$$

Так как подынтегральная функция представляет собой произведение функций, каждая из которых зависит только от одной переменной интегрирования, то мы можем вынести за знак интеграла множители, не зависящие от переменной интегрирования. Получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(b_i^1(y^1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(b_i^2(y^2)\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left(b_i^{L-1}(y^{L-1})\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\int_{-\infty}^{\infty} b_i^L(y^L)dy^L\right)dy^{L-1}\ldots\right)dy^2\right)dy^1. \qquad (24)$$

Так как $b_i^L(y^L)$ – плотность распределения наблюдения y^L, то по свойству плотности распределения [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_i^L(y^L)dy^L = 1 \qquad (25)$$

Подставляя (24) в (25) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(b_i^1(y^1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(b_i^2(y^2)\cdot\ldots\int_{-\infty}^{\infty} b_i^{L-1}(y^{L-1})\cdot 1\right)dy^{L-1}\ldots\right)dy^2\right)dy^1. \qquad (26)$$

Рекурсивно выполняя подобную операцию (учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} b_i^1(y^1)dy^1=1$), придем к следующему:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(b_i^1(y^1)\cdot 1)dy^1=1 \qquad (27)$$

Таким образом, получаем, что L-кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} B_i(y^1,y^2,\ldots,y^L)dy^1\,dy^2\ldots\,dy^L$$

равен 1, то есть утверждение 3 доказано.

Физический смысл утверждения 3 (21) заключается в следующем. Полный L-мерный объем фигуры, ограниченной поверхностью L-мерного распределения системы наблюдений СММ для i-го скрытого состояния и L-мерной плоскостью $y^1,y^2,\ldots,y^L$, равен 1.

Доказанные утверждения позволяют сделать вывод о том, что формируемая предложенным способом L-мерная плотность распределения системы наблюдений для каждого скрытого состояния обладает требуемыми свойствами (выражения (15), (19), (21)). Поэтому

множество, состоящее из таких плотностей для всех скрытых состояний, может быть использовано для задания СММ с несколькими наблюдениями и решения трех основных проблем СММ.

В представленной работе предложено расширить классические СММ, дополнив их несколькими наблюдениями. В результате был получен новый класс СММ с несколькими наблюдениями. Структурная схема таких моделей представлена на рисунке 5. В качестве наблюдений в разработанной СММ с несколькими наблюдениями было предложено использовать многомерную плотность распределения системы наблюдений. Рассмотрен порядок ее формирования. Сформулированы и доказаны утверждения, позволившие сделать вывод о том, что формируемая описанным способом многомерная плотность распределения обладает требуемыми свойствами. Получены аналитические выражения, позволяющие применять СММ с несколькими наблюдениями для решения практических задач.

Литература

1. Internet traffic modeling by means of Hidden Markov Models / A. Dainotti [et al] // Computer Networks. – 2008. – V. 52. – N. 14. – P. 2645–2662.

2. McLachlan, G. Finite mixture models / G. McLachlan, D. Peel. – John Wiley & Sons, 2004.

3. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. Справ. изд. / С.А. Айвазян [и др.] ; под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

4. Королев, В. Ю. ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор / В.Ю. Королев. – Москва: ИПИ РАН, 2007. – 94 с.

5. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. – 5-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.

6. Rabiner, L. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition / L. Rabiner // Proceedings of the IEEE. – 1989. – V. 77. – N. 2. – P. 257–286.

7. Rabiner, L. Fundamentals of speech recognition / L. Rabiner, B. Juang. – Englewood Cliffs : PTR Prentice Hall, 1993. – V. 14.

8. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 3 / Г.М. Фихтенгольц – М.: Физматлит, 2008. – 728 с.

9. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин [и др.] ; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.

10. Ветров, Д. П. Автоматическое определение количества компонент в ЕМ-алгоритме восстановления смеси нормальных распределений / Д.П. Ветров, Д.А. Кропотов, А.А. Осокин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50. – № 4. – С. 1–14.

11. Бенинг, В. Е. Асимптотически оптимальный критерий проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений / В.Е. Бенинг, А.К. Горшенин, В.Ю. Королев // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5. – № 3. – С. 4–16.

12. Горшенин, А. К. О применении асимптотических критериев для определения числа компонент смеси вероятностных распределений / А.К. Горшенин // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4. – № 1. – С. 45–53.