Расчет вероятности битовой и символьной ошибок для канала связи при приеме сигнальных конструкций стандарта DVB-S2

Calculating bit and symbol error rates in a communication channel for signal processing trellis modulation under the DVB-S2 standard

Савищенко / Savischenko N.
Николай Васильевич
(snikaspb@mail.ru)
доктор технических наук, профессор.
ФГКВОУ ВПО «Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С. М. Буденного» (ВАС им. С. М. Буденного),
заместитель начальника кафедры.
г. Санкт-Петербург

Африкантов / Afrikantov I.
Игорь Николаевич
(Afrikantovigor@mail.ru)
ВАС им. С. М. Буденного, начальник отдела.
г. Санкт-Петербург

Капралов / Kapralov D.
Дмитрий Дмитриевич
(dmitry_kapralov@mail.ru)
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича»,
инженер лаборатории.
г. Санкт-Петербург

Кириллов / Kirillov V.
Вячеслав Сергеевич
(kirillov.slv@gmail.com)
ООО СТЦ,
ведущий инженер.
г. Санкт-Петербург

Остроумов / Ostroumov O.
Олег Александрович
(oleg-26stav@mail.ru)
ВАС им. С. М. Буденного, адъюнкт кафедры.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: сигнально-кодовые конструкции – signal-code sequences; стандарты DVB – DVB standard; устойчивость – stability; помехоустойчивость – noise immunity; вероятность ошибки – error rate.

В статье рассматриваются сигнальные конструкции, применяемые в стандарте DVB-S2. Разработана методика расчета минимального евклидова расстояния для сигналов амплитудно-фазовой модуляции (АФМ). Представлен математический расчет символьной и битовой вероятностей ошибок для канала связи с детерминированными параметрами и аддитивным белым гауссовским шумом при когерентном приеме иерархических сигналов 8-ФМ и сигналов 16-АФМ.

The article reviews the signal sequences used within the DVB-S2 standard. A technique for the calculation of the minimum Euclidian distance for amplitude-phase modulated (APM) signals is presented. Mathematical calculations are presented of bit and symbol error rates for a fixed parameters communication channel with an additive Gaussian noise at coherent reception of 8-PM and 16-APM hierarchical signals.

Введение

Одним из способов повышения помехоустойчивости является применение перспективных сигнально-кодовых конструкции (СКК). Анализ существующих сигнальных конструкций и помехоустойчивых кодов позволяет ограничить поиск СКК среди новых телекоммуникационных стандартов: DVB-S, DVB-T, DVB-C, Wi-Fi, Wi-Max и других. Многообразие сигнальных конструкций и помехоустойчивых кодов приводит к большому числу вариантов СКК. В данной статье рассмотрим и проведем анализ помехоустойчивости сигнальных конструкций, применяемых в стандарте DVB-S2.

В стандарте DVB-S2 для повышения защищенности от помех применяется перемежение данных и наложение двухуровневого кода для прямой коррекции. В каналах связи со случайными ошибками (обычно с аддитивными помехами типа белого гаусовского шума) на практике используются лишь несколько кодов. При этом системы внешнего и внутреннего кодирования отличаются от тех, которые используются в стандарте DVB-S. В новом стандарте DVB-S2 используют следующие коды: сверточные, Рида-Соломона, турбокоды и коды с низкой плотностью проверки на четность (Low

Density Parity Check Codes – LDPC) [1]. Сверточный код, как правило, используют при передаче речевой информации. В этом случае вероятность ошибки в канале может быть достаточно большой, но передаваемая информация будет разборчива. При передаче данных в системах с более высокой надежностью применяют каскадные коды (как правило, внешний – код Рида-Соломона, внутренний – сверточный код).

В стандарте DVB-S2 используют четыре типа модуляции – 4-ФМ (QPSK) (рис. 1а), 8-ФМ (8-PSK) (рис. 1б), 16-АФМ (16-APSK) (рис. 2а), 32-АФМ (32-APSK) (рис. 2б). Первые две сигнальные конструкции используются в вещательных сетях. Две другие сигнальные конструкции могут использоваться при более высоком отношении сигнал/шум на приемной стороне, а на передаче должно использоваться предварительное искажение сигнала, чтобы компенсировать нелинейность транспондера. Данные виды модуляции имеют большую спектральную эффективность, хотя и требуют высоких затрат по мощности передатчика.

Математическая модель канала связи

Предположим, что для передачи информации используется M сигналов $s_r(t)$, $r=\overline{0,M-1}$, передаваемых на интервале T и имеющих конечную энергию

$$E_r=\int_0^T s_r^2(t)\,dt<\infty.$$

Рассмотрим математическую модель канала связи [2,3]

$$y(t)=\mu s_r(t)+n(t),\ 0\le t\le T$$

где $y(t)$ – принятый сигнал, μ – коэффициент передачи канала, $s_r(t)$ – переданный сигнал, $n(t)$ – аддитивная помеха типа белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью шума N_0. В данной модели предполагается, что коэффициент передачи μ – детерминированная величина. Для каналов с общими неселективными замираниями, когда μ является случайной величиной, методика расчета помехоустойчивости представлена в [4]. Для анализа помехоустойчивости сигнальных конструкций удобно использовать их геометрические модели, построение которых основано на процедуре Грама-Шмидта [5].

Энергетические характеристики сигнальных конструкций

Пусть E_r – энергия сигнала $s_r(t)$. Тогда по определению

$$E_m=\max_r E_r,\ E_c=\frac{1}{M}\sum_{r=0}^{M-1}E_r,$$

соответственно максимальная и средняя энергия. Для первоначальной оценки помехоустойчивости сигнальных конструкций могут использоваться, соответственно, коэффициенты помехоустойчивости по максимальной и средней энергии [3]:

$$\alpha_m^2=\frac{d_{\min}^2}{4E_m},\ \alpha_c^2=\frac{d_{\min}^2}{4E_c},$$

где $d_{\min}=\min_{r\ne k}\rho(s_r,s_k)$ и $\rho(\cdot,\cdot)$ – евклидова метрика.

Имеющиеся в научной литературе расчеты данных коэффициентов основаны на частных случаях [3] и исключают вариант произвольного отношения энергии

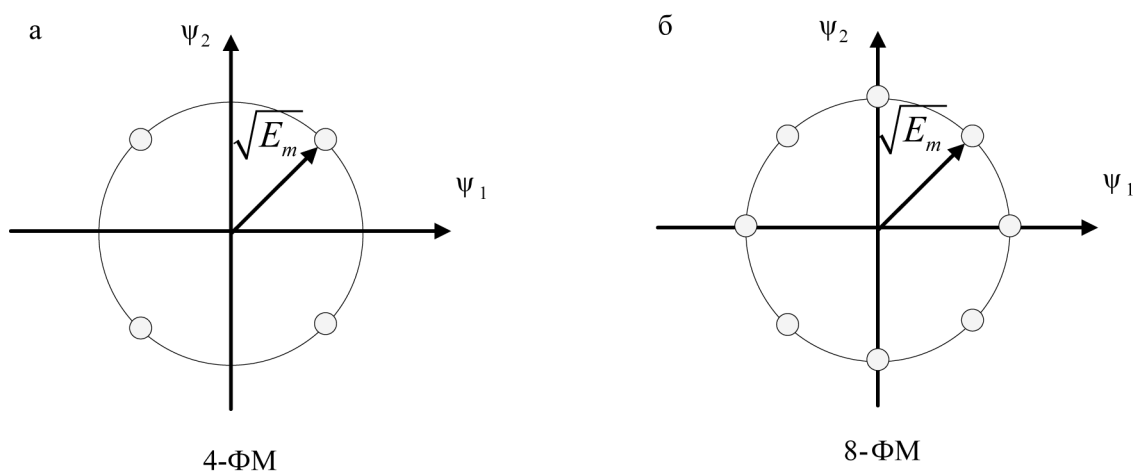

Рис. 1. Геометрическое представление сигналов применяемых в стандарте DVB-S2: а – 4-ФМ; б – 8-ФМ

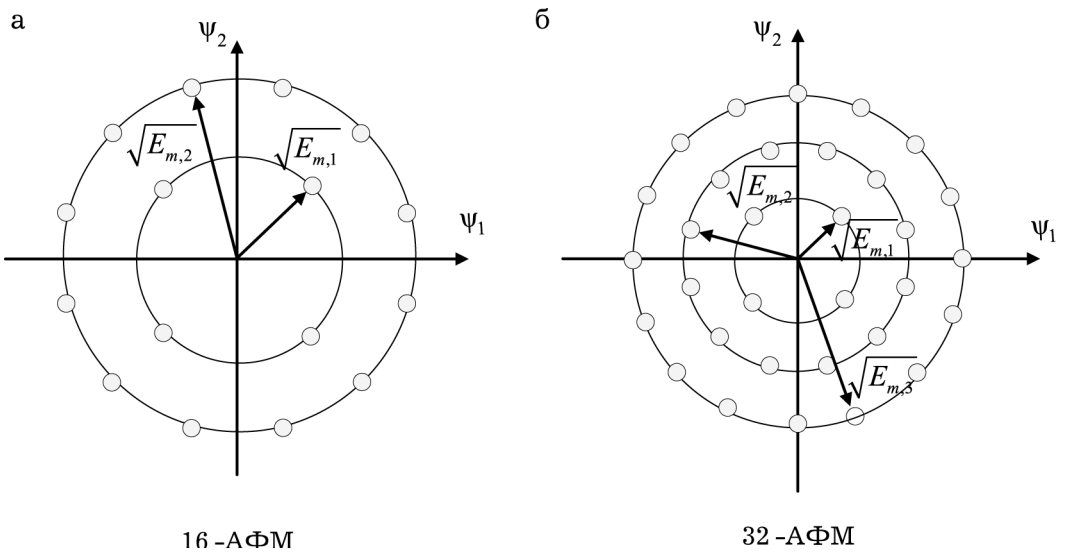

Рис. 2. Геометрическое представление сигналов применяемых в стандарте DVB-S2: а – 16-АФМ; б – 32-АФМ

на различных уровнях сигналов, характерного для сигнальных конструкций АФМ.

Расчет энергетических характеристик для сигнальной конструкции АФМ

В стандарте цифрового спутникового вещания DVB-S2 наряду с сигнальными конструкциями 4-ФМ и 8-ФМ используются также сигналы 16-АФМ и 32-АФМ. Для этой сигнальной конструкции 16-АФМ число сигналов на первом уровне $M_1 = 4$, на втором $M_2 = 12$. Пусть $\gamma_k = \sqrt{E_{m,k+1}} / \sqrt{E_{m,1}}$ $k=\overline{0,n-1}$ – отношение двух радиусов окружностей. Эта величина в стандарте для каждой из сигнальных конструкций имеет несколько значений для различных скоростей передачи информации. Так, например, для 16-АФМ $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1$ принимает шесть значений: 3,15; 2,85; 2,75; 2,70; 2,60 и 2,57. Аналогично для 32-АФМ

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{E_{m,2}}}{\sqrt{E_{m,1}}}$$

принимает пять значений: 2,84; 2,72; 2,64; 2,54; 2,53, соответственно

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{E_{m,3}}}{\sqrt{E_{m,1}}}$$

равно 5,27; 4,87; 4,64; 4,33 и 4,30.

Рассмотрим энергетические характеристики сигнальной конструкции 16-АФМ. Максимальная энергия сигнальной конструкции $E_m = E_{m,2} = \gamma^2 E_{m,1}$, а средняя энергия

$$E_c = \frac{1}{M}\left(M_1 E_{m,1} + M_2 E_{m,2}\right) = \frac{1+3\gamma^2}{4} E_{m,1}.$$

Отсюда можно выразить радиус первой окружности через максимальную и среднюю энергии:

$$E_{m,1} = \frac{E_m}{\gamma^2}, \quad E_{m,1} = \frac{4E_c}{1+3\gamma^2}.$$

Следовательно, квадрат пик-фактора сигнала, определяемый как отношение максимальной энергии к средней, для 16-АФМ равен

$$\Pi^2 = \frac{E_m}{E_c} = \frac{4\gamma^2}{1+3\gamma^2}.$$

Следовательно, для 16-АФМ, когда $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1$ принимает шесть значений: 3,15; 2,85; 2,75; 2,70; 2,60 и 2,57, получаем Π^2=1,29, 1,28, 1,277, 1,275, 1,27, 1,269.

Определим минимальное евклидово расстояние сигнальной конструкции. На каждом из сигнальных уровней обозначим евклидово расстояние между сигналами как $d^{(k)}$, $k=\overline{1,n}$, так как эти расстояния одинаковы на уровнях. Тогда, $d^{(1)} = 2\sqrt{E_{m,1}}(\sin\pi / M_1)$, $d^{(2)} = 2\sqrt{E_{m,2}}\sin(\pi / M_2)$. Следовательно

$$\frac{d^{(2)}}{d^{(1)}} = \gamma\frac{\sin(\pi / M_2)}{\sin(\pi / M_1)} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}+1}.$$

Определим расстояния между сигналами различных уровней. Из геометрического представления сигнальной

конструкции понятно, что минимальное расстояние между сигналами двух уровней равно

$$d^{(1,2)} = \sqrt{E_{m,2}} - \sqrt{E_{m,1}} = (\gamma - 1)\sqrt{E_{m,1}}.$$

Таким образом, для определения минимального евклидова расстояния необходимо сравнить три величины: $d^{(1)}$, $d^{(2)}$ и $d^{(1,2)}$, причем последние две зависят от величины γ. Так как все эти величины пропорциональны $\sqrt{E_{m,1}}$, то без ограничения общности можно считать, что $E_{m,1} = 1$. Определим точки пересечения графиков (рис. 3):

$$\gamma^{(1)} = \left(1 - 2\sin\frac{\pi}{M_2}\right)^{-1} = \frac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}} \approx 2{,}073,$$

$$\gamma^{(2)} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414,$$

$$\gamma^{(3)} = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}732.$$

Как нетрудно видеть из рис. 3, минимальное евклидово расстояние для сигнальной конструкции 16-АФМ определяется как

$$d_{min} = \begin{cases} d^{(1)} = 2\sqrt{E_{m,1}}\sin\dfrac{\pi}{M_1}, \ \gamma \ge 1+\sqrt{3}, \\ d^{(2)} = 2\gamma\sqrt{E_{m,1}}\sin\dfrac{\pi}{M_2}, \ \dfrac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}} \le \gamma \le 1+\sqrt{3}, \\ d^{(1,2)} = (\gamma-1)\sqrt{E_{m,1}}, \quad 1 < \gamma \le \dfrac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что $E_{m,1} = q^2(\gamma)\, d^2$, где $d \equiv d_{\min}$ и

$$q(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \gamma \ge 1+\sqrt{3}, \\ \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\gamma}, \ \dfrac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}} \le \gamma \le 1+\sqrt{3}, \\ \dfrac{1}{\gamma-1}, \ 1 < \gamma \le \dfrac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Окончательно получаем, что максимальная и средняя энергия соответственно равны

$$E_m = \gamma^2 q^2(\gamma) d^2, \ E_c = \frac{1+3\gamma^2}{4} q^2(\gamma) d^2.$$

Отсюда минимальное евклидово расстояние для сигнальной конструкции 16-АФМ можно выразить через максимальную и среднюю энергии:

$$d = \frac{\sqrt{E_m}}{\gamma\, q(\gamma)} = \frac{2}{q(\gamma)}\sqrt{\frac{E_c}{1+3\gamma^2}}.$$

Рассмотрим для 16-АФМ шесть значений γ: 3,15; 2,85; 2,75; 2,70; 2,60 и 2,57. При этом три значения: 3,15; 2,85; 2,75 больше $\gamma^{(3)} = 1+\sqrt{3} \approx 2.732$, поэтому при этих значениях γ минимальное евклидово расстояние равно $d^{(1)}$. Соответственно для $\gamma = 2{,}70$; 2,60; 2,57 минимальное евклидово расстояние будет равно $d^{(2)}$. Минимальное евклидово расстояние позволяет в первом приближении оценить помехоустойчивость сигнальной конструкции 16-АФМ и сравнить ее с другими сигнальными конструкциями [4].

Расчет вероятности символьной ошибки сигнальной конструкции 16-АФМ стандарта DVB-S2

Формула для вероятности символьной ошибки P_e для сигнальной конструкции 16-АФМ имеет вид [4]:

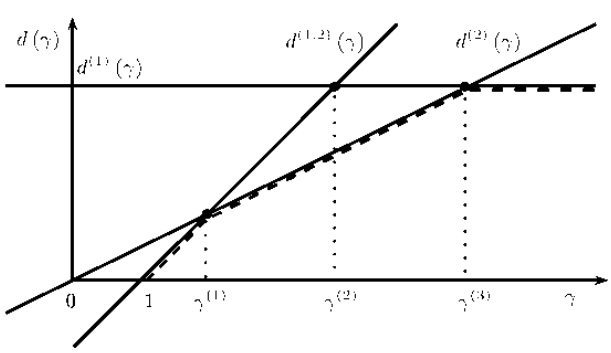

Рис. 3. Евклидовы расстояния

$$P_e=\sum_{k=1}^{7}\alpha_k T\left(\alpha_{k1}\sqrt{h_{bc}^2},\eta_k\right)-\frac{1}{4}Q^2\left(\alpha_{12}\sqrt{h_{bc}^2}\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}Q\left(\alpha_{k3}\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\alpha=(1,\ 1,\ 1,\ ½,\ ½,\ ½,\ ½),\quad \eta=\left(\mathrm{tg}\beta,\mathrm{tg}\varphi,\mathrm{tg}\frac{\pi}{12},\right.$$

$$\left.\mathrm{tg}\theta,\mathrm{ctg}\chi,\mathrm{ctg}\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right),\mathrm{ctg}\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)\right);$$

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\tan\frac{\pi}{12};\ \mathrm{ctg}\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-\frac{2}{\gamma};\quad \chi=2\varphi+\theta-\frac{\pi}{2};$$

$$q_1(\gamma)=\sqrt{\gamma^2-\sqrt{3}\gamma+1};\ \mathrm{tg}\theta=\frac{\gamma\left(\gamma-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)}{\gamma\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}-1};$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi=2\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{q_1^2(\gamma)}-1.$$

При этом учитываем, что $\sqrt{E_{m,1}}=\frac{2\sqrt{E_c}}{\sqrt{1+3\gamma^2}}$; $E_c=E_{bc}\log_2 M=4E_{bc}$. Следовательно,

$$\sqrt{E_{m,1}}=\frac{4\sqrt{E_{bc}}}{\sqrt{1+3\gamma^2}}.$$

Коэффициенты α_{ki}, i=1,2,3 при h_{b^2c} могут быть определены как

$$a_{11}=2\sqrt{2}\frac{\gamma-1}{\sqrt{1+3\gamma^2}};\ \alpha_{21}=2\sqrt{2}g(\gamma);$$

$$\alpha_{41}=\frac{4}{\sqrt{1+3\gamma^2}};\ \alpha_{51}=2\sqrt{2}\frac{\sin\chi}{\cos\varphi}g(\gamma);$$

$$\alpha_{61}=2\sqrt{2}\frac{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{12}}g(\gamma);\ \alpha_{71}=4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\frac{\gamma}{\sqrt{1+3\gamma^2}},$$

где $g(\gamma)=\sqrt{\frac{\gamma^2-\sqrt{3}\gamma+1}{1+3\gamma^2}}=\frac{q_1(\gamma)}{\sqrt{1+3\gamma^2}}$.

Остальные коэффициенты совпадают с приведенными выше:

$$\alpha_{12}=\alpha_{41},\ \alpha_{13}=\alpha_{41},\ \alpha_{23}=\alpha_{51},\ \alpha_{33}=\alpha_{61},\ \alpha_{43}=\alpha_{71}.$$

Проведенные по полученным формулам расчеты представлены на рис. 4. Пусть задан уровень вероятности ошибки на символ $P_в^*=10^{-5}$, тогда для 16-АФМ при γ = 3,15 требуемое отношение сигнал/шум h_{b^2c} = 15,181647 дБ; при γ = 2,85 h_{b^2c} =14,6591 дБ; при γ = 2,75 h_{b^2c} = 14,565 474 дБ; при γ = 2,7 h_{b^2c} = 14,534188 дБ; при γ = 2,6 h_{b^2c} = 14,498 08 дБ; пр и γ = 2,57 h_{b^2c} = 14,493 041 дБ. При "обрыве" канала связи, т.е. когда $h_{bc}^2\to 0$, получаем, что

$$\lim_{h_{bc}^2\to 0}P_e(h_{bc}^2)=1-\frac{1}{M}.$$

Таким образом, например, для сигнальной конструкции 16-АФМ $\lim_{h_{bc}^2\to 0}P_e(h_{bc}^2)=15/16=0{,}9375$, а для сигнальной конструкции 32-АФМ $\lim_{h_{bc}^2\to 0}P_e(h_{bc}^2)=31/32=0{,}96875$.

Расчет вероятности битовой ошибки для сигнальных конструкций иерархической 8-ФМ и 16-АФМ стандарта DVB-S2

Иерархическая сигнальная конструкция 8-ФМ

В стандарте спутникового телевидения DVB-S2 применяются сигналы иерархической 8-ФМ. При использовании иерархической сигнальной конструкции 8-ФМ поток битов разбивается на два: первый поток с высоким приоритетом – HP и второй поток с низким приоритетом – LP.

В этом случае нетрудно убедиться, используя полученные в [4] соотношения, получим, что в потоке с высоким приоритетом

$$P_{b,HP}=P_{b2}=P_{b3}=\frac{1}{2}\left[Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)+\right.$$

$$\left.+Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)\right],$$

где $h_m^2=\frac{E_m}{N_0}$ – показатель эффективности использования энергетического ресурса (отношение сигнал/шум), E_m – максимальная энергия сигнала, θ=2φ, φ – пространственный угол.

Вероятность битовой ошибки в потоке с низким приоритетом равна

$$P_{b,LP}=P_{b1}=2\left[T\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\theta,\mathrm{ctg}\theta\right)+T\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\theta,\mathrm{tg}\theta\right)\right]$$

или, применяя свойства Т-функции Оуэна [4], данную формулу удобнее выразить через функции Гаусса

$$P_{b,LP}=P_{b1}=Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\theta\right)+Q\left(\sqrt{2h_m^2}\cos\theta\right)-$$

$$-2Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\theta\right)Q\left(\sqrt{2h_m^2}\cos\theta\right).$$

Сигнальная конструкция 16-АФМ

Для сигналов 16-АФМ, применяемых в стандарте DVB-S2, при использовании критерия максимального правдоподобия вероятность битовой ошибки уровня LSB (третий и четвертый биты) может быть легко вычислена, в этом случае области принятия решений представляют собой полуплоскости с границами по осям координат. В результате несложных преобразований приходим к соотношению

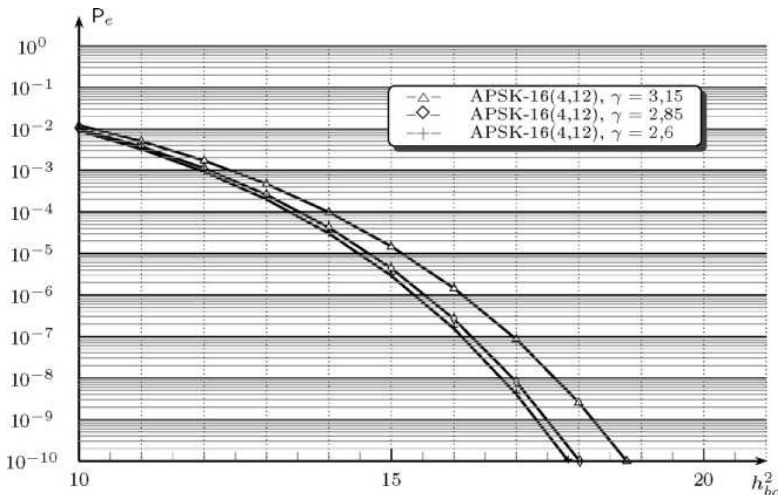

Рис. 4. График вероятности символьной ошибки $P_e(h_{bc}^2)$ для сигналов 16-АФМ стандарта DVB-S2

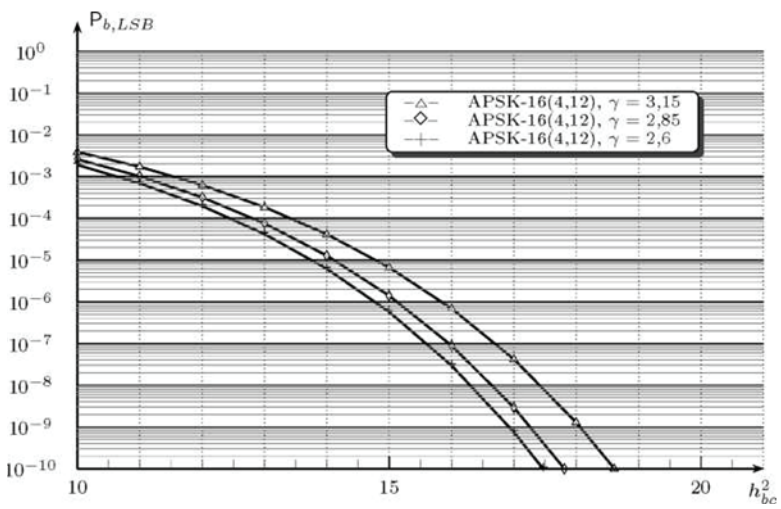

Рис. 5. График вероятности битовой ошибки уровня LSB $P_{b,LSB}(h_{bc}^2)$ для сигналов 16-АФМ стандарта DVB-S2

$$P_{b,LSB} = P_{b3} = P_{b4} = \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{4\sqrt{2}\gamma \sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sqrt{h_{bc}^2} \right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(\frac{4\sqrt{2}\gamma \cos\frac{\pi}{12}}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q\left(\frac{4\gamma}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q\left(\frac{4}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right).$$

График вероятности битовой ошибки уровня *LSB* (третий и четвертый биты) представлен на рис. 5.

Вывод формул для вычисления вероятности битовой ошибки уровня *MSB* $P_{b,MSB} = P_{b1} = P_{b2}$ (первый и второй биты) представляет собой более трудоемкую работу, хотя алгоритм получения формулы прозрачен [4]. Трудность, прежде всего, связана со сложными границами областей принятия решений для 0-го и 1-го битов, представляющими собой ломаные линии. Можно получить приближенную формулу для $P_{b,MSB}$, если границу, представляющую собой ломаную линию (рис. 4), заменить на прямую, проходящую параллельно оси координат на расстоянии η, которое, в общем случае, выбирается из условия:

$$\max\left\{ \sqrt{E_{m,1}} \cos\frac{\pi}{4},\ \gamma\sqrt{E_{m,1}} \sin\frac{\pi}{12} \right\} < \eta < \gamma\sqrt{E_{m,1}} \cos\frac{\pi}{4}.$$

В этом случае вывод формулы значительно упрощается:

$$P_{b,MSB} = P_{b1} = P_{b2} \approx \frac{1}{4}\left(Q\left(\delta(\eta_E + \gamma \sin\frac{\pi}{12}) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + \right.$$

$$+ Q\left(\delta\left(\eta_E - \gamma \sin\frac{\pi}{12} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q\left(\delta\left(\eta_E + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) +$$

$$Q\left(\delta\left(\eta_E - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q\left(\delta\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} - \eta_E \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) +$$

$$+ Q\left(\delta\left(\gamma \cos\frac{\pi}{12} - \eta_E \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) - Q\left(\delta\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + 2\eta_E \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) -$$

$$\left. - Q\left(\delta\left(\gamma \cos\frac{\pi}{12} + 2\eta_E \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right),$$

где $\delta = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+3\gamma^2}}$ и $\eta_E = \frac{\eta}{\sqrt{E_{m,1}}}$.

Отличие этой формулы от формулы, которую можно получить на основе верхней аддитивной границы, заключается в том, что она является приближенной во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум h_{bc}^2, а не только при $h_{bc}^2 \to \infty$.

Вывод: Из графиков вероятности символьной и битовой ошибок для сигнальной конструкции 16-АФМ (рис. 4, 5) стандарта DVB-S2 видно, что при одинаковом отношении сигнал/шум вероятность символьной (битовой) ошибки тем больше, чем больше отношение $\gamma = \sqrt{E_{m,2}/E_{m,1}}$ энергии второго уровня к энергии первого уровня.

Литература

1. Gallager, R. G. Low Density Parity Check Codes / R.G. Gallager. – Sc. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, MIT, Cambridge, Mass. 1960. – 90 с.

2. Савищенко, Н. В. Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема / Н.В. Савищенко; под ред. Д.Л. Бураченко. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 420 с.

3. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г. Зюко [и др.]; под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.

4. Савищенко, Н. В. Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи : монография / Н.В. Савищенко. – СПб.: ВАС, 2012. – 560 с.

5. Бураченко, Д. Л. Геометрические модели сигнально-кодовых конструкций / Д.Л. Бураченко, Н.В. Савищенко. – СПб.: ВАС, 2012. – 388 с.