

ИНФОКОММУНИКАЦИИ

Особенности контроля невырожденности в моделировании разделительных процессов обработки давлением

Features of control of nonsingularity in modelling of separating processes of pressure working

Ключевые слова: матрица жесткости – stiffness matrix; невырожденность – nonsingularity; метод конечных элементов – FEM; разделительные процессы – blanking processes.

Оценены наибольшее и наименьшее положительное собственные числа нерегуляризованной матрицы жесткости. Оценка произведена по конечным элементам из очага деформации и конечным элементам одного ряда. Показана пригодность оценки для контроля невырожденности.

The greatest and the least positive nonregularized stiffness matrix eigenvalues are estimated. The estimation is based on finite elements from the centre of deformation and on finite elements of one row. Suitability of the estimation for control of nonsingularity is shown.

ВИННИК / VINNIK P.

Петр Михайлович

(sigure@rambler.ru)

доцент кафедры Высшей математики,
Балтийский Государственный Технический Университет
«Военмех» имени Д.Ф. Устинова,
Санкт-Петербург

зованной матрицы) зависит от пути выполнения. Там же показана целесообразность рассмотрения вместо числа обусловленности регуляризованной матрицы $[K_i]$ спектрального числа обусловленности $c_0([KG_i])$, определяемого непосредственно по неотрицательно-определенной матрице $[KG_i]$ как отношение ее максимального собственного числа (СЧ) λ_1 к минимальному ненулевому (положительному) λ_L .

Контроль близости регуляризованной матрицы $[K_i]$ СЛАУ МКЭ к вырожденной матрице будем вести по числу $c_0([KG_i])$ нерегуляризованной ГМЖ $[KG_i]$. Для оценки изменения числа $c_0([KG_i])$ на протяжении процесса необходимо оценить наибольшее и наименьшее положительное СЧ матрицы $[KG_i]$.

Из регулярности исходной сетки следует наличие на начальном этапе предопределенности глобальной матрицы жесткости (ГМЖ) локальными матрицами жесткости (ЛМЖ). По мере развития процесса указанная предопределенность сохраняется в виде сильной зависимости.

Из близости к вырожденности ЛМЖ некоторых КЭ следует, что эти ЛМЖ сильнее прочих влияют на ГМЖ, следовательно, можно оценить наибольшие СЧ ГМЖ (снизу, так как все ЛМЖ неотрицательно определены) через наибольшие СЧ суммы ЛМЖ сильно искаженных КЭ. Для разделительных процессов это – те КЭ, которые находятся в очаге пластической деформации.

Будем считать, что указанная выше сумма ЛМЖ сильно искаженных КЭ приемлемо аппроксимирует снизу m штук наибольших СЧ ГМЖ, если выполняются неравенства $\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \dots$

ВВЕДЕНИЕ

Среди процессов обработки давлением с точки зрения организации численного моделирования наименее изучены разделительные операции. Это объясняется объемным характером напряженного и деформированного состояний, наличием очень больших смещений и пластических деформаций, заканчивающихся разрушением. Все это усложняет численное моделирование, и, в частности, требует обращать особое внимание на контроль качества получаемых результатов.

Данная статья продолжает рассмотрение методологических особенностей численного моделирования разделительных операций, начатое в [1].

Обозначим через $[KG_i]$ и $[FG_i]$ – соответственно, нерегуляризованную глобальную матрицу жесткости (ГМЖ) и нерегуляризованный вектор нагрузок на i -ом шаге. В [1] указано, что регуляризация матрицы $[KG_i]$ – неканонический процесс, то есть его результат (например, спектр регуляри-

$\lambda_m > \mu_m > \lambda_{m+1} > \lambda_{m+2} > \mu_{m+1}$. Здесь $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_K$ — собственные числа матрицы-суммы ЛМЖ сильно искаженных КЭ. Величина m вместе с относительной погрешностью $\frac{\lambda_i - \mu_i}{\lambda_i}$ является мерой качества аппроксимации.

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

Для моделирования была взята прямоугольная область, разделенная первоначально прямыми линиями, параллельными сторонам прямоугольника и равноотстоящими друг от друга, на 75×16 одинаковых прямоугольников, а затем все прямоугольники однотипной диагональю были разделены на два треугольных КЭ. Всего, таким образом, было построено 2400 одинаковых треугольных КЭ. Были рассмотрены как вариант, когда взята та диагональ, которая в очаге пластической деформации приближенно перпендикулярна направлению первой главной оси деформации, что позволяет наблюдать эффект такого

построения сетки, когда в процессе деформации качество формы КЭ в очаге пластической деформации до некоторого момента повышается, так и вариант, когда взята диагональ, которая приближенно параллельна направлению первой главной оси деформации в очаге пластической деформации.

Очаг пластической деформации при вырубке приближенно охватывает 96 КЭ. В первом варианте выбора диагонали максимум качества формы КЭ очага пластической деформации достигается примерно при 11,5% внедрения пуансона, а при 19,5% внедрения КЭ в очаге пластической деформации имеют приближенно такое же качество формы как при 0%, или, говоря по-другому, примерно такое же качество формы, как у мало-деформированных КЭ. Для случая перпендикулярной диагонали в таблице 1 приведены величина m и величины относительной погрешности (в процентах) аппроксимации одиннадцати наибольших СЧ ГМЖ одиннадцатью наибольшими СЧ матрицы суммы ЛМЖ тех 96 КЭ, которые

Таблица 1

Качество аппроксимации наибольших СЧ ГМЖ суммой ЛМЖ КЭ из очага пластической деформации (первый вариант выбора диагонали).

	Процент внедрения пуансона, в скобках указана величина m				
Номера СЧ	19,5% (0)	22% (1)	24,5% (5)	27% (7)	29% (11)
11	39,84	35,99	28,22	13,45	0,30
10	38,80	33,88	24,69	11,28	0,52
9	36,11	30,61	22,98	10,07	0,49
8	33,24	29,48	22,20	2,89	0,18
7	33,14	29,60	14,09	0,25	0,14
6	32,35	23,38	6,29	0,21	0,12
5	28,22	17,32	0,44	0,20	0,11
4	23,67	12,46	0,42	0,19	0,10
3	20,32	8,56	0,39	0,18	0,10
2	16,98	4,04	0,40	0,17	0,08
1	12,00	0,71	0,34	0,15	0,09

ИНФОКОММУНИКАЦИИ

находятся в очаге пластической деформации, то есть существенно искажены.

Необходимо указать, что при 19,5% внедрения КЭ из очага пластической деформации по качеству формы не отличаются от других КЭ, тогда как с дальнейшим ростом процента внедрения их качество формы заметно ухудшается, например, суммы квадратов длин сторон тех КЭ, которые находятся в очаге пластической деформации, примерно в 3 раза превосходят суммы квадратов длин сторон тех КЭ, которые не находятся в очаге деформации. При втором варианте выбора диагонали такие же данные приведены в таблице 2. В таблицах 1-2 выделены жирным шрифтом относительные погрешности аппроксимации тех СЧ, которые приемлемо аппроксимированы в вышеуказанном смысле.

Повторим, что аппроксимирующая сумма ЛМЖ построена по 96 КЭ, что составляет 4% от всего количества КЭ.

Первый вариант выбора диагонали приводит к некоторому замедлению течения процесса,

поэтому моменты времени качественных изменений в вариантах различны, то есть качественные изменения происходят при разном проценте внедрения пуансона.

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

Как указано в [1], из рассмотрения построения матрицы $[KG]$ как последовательной суммы матриц, построенных по ЛМЖ КЭ, следует, что наименьшее положительное СЧ матрицы $[KG]$ будет не меньше, чем наименьшее положительное СЧ матрицы жесткости любого «длинного» ряда КЭ (при сделанных предположениях о сетке «длинный» ряд – это соединенные вместе треугольные КЭ, образованные из прямоугольной сетки размера $N \times 1$). Поэтому оценка снизу наименьшего положительного СЧ нерегуляризованной ГМЖ может быть произведена через наименьшее положительное СЧ клеточно-ленточной ГМЖ «длинного» ряда. Проведенные расчеты показывают, что отно-

Таблица 2

Качество аппроксимации наибольших СЧ ГМЖ суммой ЛМЖ КЭ из очага пластической деформации (второй вариант выбора диагонали).

	Процент внедрения пуансона, в скобках указана величина m				
Номера СЧ	14,5% (7)	17% (7)	19,5% (8)	22% (14)	24,5% (18)
11	8,77	6,56	3,66	1,71	0,82
10	8,61	4,22	3,26	1,54	0,63
9	10,60	5,34	1,39	0,64	0,46
8	11,62	6,95	3,20	1,32	0,57
7	2,32	1,24	0,68	0,37	0,23
6	1,91	1,11	0,60	0,32	0,18
5	1,81	1,04	0,56	0,29	0,16
4	1,74	1,00	0,54	0,28	0,15
3	1,71	0,97	0,52	0,27	0,15
2	1,61	0,94	0,51	0,26	0,14
1	1,88	1,06	0,53	0,25	0,12

шение наименьшего положительного СЧ нерегуляризованной ГМЖ к наименьшему положительному СЧ «длинного» ряда по мере развития процесса может изменяться примерно в 1,5 раза. Однако, так как наименьшее положительное СЧ «длинного» ряда на несколько порядков меньше такого числа ГМЖ, это все равно дает возможность построить достаточно разумную оценку. Снова укажем, что оценочная для наименьшего положительного СЧ матрица построена по 150 КЭ, что составляет 6,25% от всего количества КЭ.

При первом варианте выбора диагонали по мере развития процесса наименьшее положительное СЧ ГМЖ «длинного» ряда сначала (до 22% внедрения) уменьшается примерно на 25% своей величины, а затем начинает возрастать, хотя и не достигает первоначальных значений.

При втором варианте выбора диагонали оно по мере развития процесса монотонно возрастает.

Для построения более точной оценки наименьшего положительного СЧ можно привлечь оценку его изменения при добавлении к «длинному» ряду следующих «длинных» рядов. Как показывают расчеты, грубо приближенно можно считать, что при развитии процесса вырубки это изменение постоянно. Для рассматриваемой сетки с первым вариантом выбора диагонали наименьшее положительное СЧ «длинного» ряда в $65 \div 85$ раз меньше наименьшего положительного СЧ ГМЖ $[KG_i]$. Для второго варианта — в $55 \div 75$ раз. Конечно, это отношение зависит от общего количества «длинных» рядов, то есть от числа M .

Представляется, что факт увеличения наименьшего положительного СЧ при добавлении целого «длинного» ряда КЭ есть отражение возрастания обычной физической жесткости аналогичной ферменной конструкции.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для рассматриваемой сетки наименьшее положительное СЧ достаточно велико, а наибольшее СЧ достаточно мало, чтобы результаты расчетов можно было считать достоверными. Однако, при увеличении количества КЭ рано или поздно число $c_0([KG_i])$ станет недопустимо большим.

Из проведенных аналитических вычислений и результатов вычислительных экспериментов следуют выводы.

1) Оценка наибольшего СЧ ГМЖ может быть проведена по КЭ очага пластической деформации. Ошибка такой оценки в рассматриваемом случае не превосходит 0,2%.

2) Оценка наименьшего положительного СЧ нерегуляризованной ГМЖ может быть проведена по КЭ «длинного» ряда.

3) Полученные в данной статье оценки позволяют отслеживать изменение числа $c_0([KG_i])$ на протяжении разделительного процесса и поэтому контролировать невырожденность матрицы СЛАУ.

Литература

1. К.М. Иванов, П.М. Винник, В.Н. Иванов Численное моделирование разделительных процессов обработки давлением [Текст] // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета// №2 (33), 2012. — 192-198 с.