Контроль невырожденности в нелинейных задачах

Control of nonsingularity in nonlinear problems

Ключевые слова: матрица жесткости – stiffness matrix, невырожденность – nonsingularity, метод конечных элементов – FEM.

Матрицы жесткости метода конечных элементов имеют обычно огромные размеры. Получены некоторые алгебраические свойства таких матриц. Предлагается способ контроля невырожденности таких матриц, использующий матрицы жесткости небольших групп конечных элементов.

Stiffness matrices of finite element method have usually huge sizes. Some algebraic properties of such matrices are received. The way to control nonsingularity of such matrices is offered. It uses stiffness matrices constructed from small subsets of finite elements.

Винник / Vinnik P.
Петр Михайлович
(sigure@rambler.ru)
доцент кафедры Высшей математики,
Балтийский Государственный Технический Университет
«Военмех» имени Д.Ф. Устинова,
Санкт-Петербург

ВВЕДЕНИЕ

Наличие значительного количества общеинженерных и узкоспециальных пакетов, реализующих метод конечных элементов (МКЭ) для того или иного круга задач существенно облегчило проведение расчетов и привело к ситуации, когда методологии моделирования уделяется недостаточное внимание, что иногда приводит к ошибочным результатам или их неверной трактовке.

Данная статья продолжает рассмотрение методологических особенностей численного моделирования процессов с сильной нелинейностью, начатое в [1].

Для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела основными вариантами применения МКЭ являются методы переменной жесткости, начальных деформаций и начальных напряжений. Будем предполагать применение метода переменной жесткости.

Обозначим на i-ом шаге через Φ_i состояние системы, то есть ее геометрические (форма) и физические (накопленные к данному шагу деформации, внешние нагрузки и т.п.) характеристики, через $[KG_i]$ и $[FG_i]$ – соответственно, нерегуляризованную глобальную матрицу жесткости (ГМЖ) и нерегуляризованный вектор нагрузок, через $[U_i]$ – решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), то есть вектор перемещений. Сущность рассматриваемого варианта МКЭ состоит в последовательном вычислении состояний Φ_i по схеме, приведенной на рис. 1.

Матрица $[KG_i]$ зависит от геометрической формы расчетной области и текущего физического состояния ее точек, а вектор $[FG_i]$ – от текущего физического состояния и приложенных на данном шаге нагрузок. Поэтому последовательное изменение матриц $[KG_i]$ и векторов $[FG_i]$ полностью отражает динамику состояний Φ_i расчетной области по шагам. Следовательно, понимание динамики изменения по шагам матриц $[KG_i]$ должно способствовать пониманию динамики расчетной области.

Относительная погрешность вычисления $[U_i]$ оценивается через число обусловленности матрицы системы и погрешности матрицы системы и вектора свободных членов (см. [2], с. 123, Предложение 2). Предполагая СЛАУ МКЭ разрешимой, можно считать, что точность расчетов на каждом шаге однозначно предопределяется регуляризованной ГМЖ $[K_i]$. В [1] обосновано применение вместо числа обусловленности матрицы $[K_i]$ числа $c_0([KG_i])$, определяемого непосредственно по неотрицательно-определенной матрице $[KG_i]$ как отношение ее максимального собственного числа (СЧ) λ_1 к минимальному ненулевому (положительному) λ_L. Контроль невырожденности регуляризованной матрицы $[K_i]$ СЛАУ МКЭ будем вести по числу $c_0([KG_i])$. Для оценки изменения числа $c_0([KG_i])$ в ходе процесса необходимо оценить наибольшее и наименьшее положительное СЧ матрицы $[KG_i]$.

Если предполагать исходную сетку конечных элементов (КЭ) регулярной, то есть состоящей из геометрически одинаковых КЭ, расположенных в правильном порядке, то с одной стороны, так как все КЭ одинаковы, то ГМЖ, по крайней мере, на начальной стадии процесса предопределена количеством КЭ и локальной матрицей жесткости

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{[KG_1][U]=[FG_1]} \arrow[r] & \boxed{[U_1]} \arrow[dr] & \boxed{[KG_2][U]=[FG_2]} \arrow[r] & \boxed{[U_2]} \arrow[dr] & \\
\boxed{\Phi_1} \arrow[u] \arrow[rr] & & \boxed{\Phi_2} \arrow[u] \arrow[rr] & & \boxed{\Phi_3}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1. Общая схема МКЭ метода переменной жесткости.

(ЛМЖ) одного произвольного КЭ. Действительно, ЛМЖ различных КЭ при подходящем выборе локальной нумерации узлов будут одинаковыми, а ГМЖ является суммой матриц, построенных по этим ЛМЖ. С другой стороны, по мере развития процесса происходит изменение формы и физического состояния КЭ. Можно сказать, что теперь форма и физическое состояние различных КЭ не одинаковы, но находятся в некоторых диапазонах. Можно еще говорить о «плотности» КЭ на поддиапазонах этих диапазонов.

Желательно было бы указать алгоритм оценки этих диапазонов, а затем алгоритм оценки вырожденности матрицы СЛАУ по оцененным диапазонам.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ

В [1] эмпирически изучен характер предопределенности ГМЖ от ЛМЖ для случая исходной расчетной области прямоугольной формы, где элементная сетка была образована взаимно перпендикулярными семействами линий, параллельных координатным осям, причем линии одного семейства располагались на равном расстоянии друг от друга, а каждый полученный прямоугольник был разделен однотипной диагональю на два треугольных КЭ. Всего 2NxM треугольных КЭ. Для определенности, будем считать N ≥ M.

Для аналитического изучения характера этой предопределенности, необходимо полностью установить алгебраические свойства ЛМЖ произвольного КЭ. Непосредственными вычислениями для случая плоского деформированного состояния в задачах теории упругости установлено следующее (здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, коэффициенты b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m понимаются традиционно для МКЭ, F – площадь КЭ).

– СЧ ЛМЖ являются (нумерация СЧ в убывающем порядке):

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0\,,$$

где

$$\lambda_2 = \left(b_i^2 + c_i^2 + b_j^2 + c_j^2 + b_m^2 + c_m^2\right)E/\left(2(1+\nu)\right);$$

λ_1 и λ_3 являются корнями уравнения

$$\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{(1+\nu)\lambda}{E}\right)^2 - (1-\nu)\left(b_i^2 + c_i^2 + b_j^2 + c_j^2 + b_m^2 + c_m^2\right)\left(\frac{(1+\nu)\lambda}{E}\right) + 12F^2 = 0\,.$$

– Собственным вектором числа λ_2 является вектор

$$\begin{pmatrix}
-2b_i(b_jc_j + b_mc_m) + c_i(b_j^2 - c_j^2 + b_m^2 - c_m^2) - c_i(b_i^2 + c_i^2)\\
2c_i(b_jc_j + b_mc_m) + b_i(b_j^2 - c_j^2 + b_m^2 - c_m^2) + b_i(b_i^2 + c_i^2)\\
-2b_j(b_ic_i + b_mc_m) + c_j(b_i^2 - c_i^2 + b_m^2 - c_m^2) - c_j(b_j^2 + c_j^2)\\
2c_j(b_ic_i + b_mc_m) + b_j(b_i^2 - c_i^2 + b_m^2 - c_m^2) + b_j(b_j^2 + c_j^2)\\
-2b_m(b_ic_i + b_jc_j) + c_m(b_i^2 - c_i^2 + b_j^2 - c_j^2) - c_m(b_m^2 + c_m^2)\\
2c_m(b_ic_i + b_jc_j) + b_m(b_i^2 - c_i^2 + b_j^2 - c_j^2) + b_m(b_m^2 + c_m^2)
\end{pmatrix}$$

причем он обеспечивает деформированное состояние чистого сдвига.

– Собственными векторами нулевых СЧ являются векторы

$$\begin{pmatrix} b_j - b_m & c_j - c_m & b_m - b_i & c_m - c_i & b_i - b_j & c_i - c_j \end{pmatrix}^T,$$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$, их физический смысл (закрепление узлов КЭ отсутствует, так как ЛМЖ нерегуляризована): возможны произвольный поворот КЭ в плоскости XOY вокруг его центра тяжести (первый вектор), произвольное смещение КЭ как твердого тела вдоль оси OX и вдоль оси OY (второй и третий векторы соответственно).

– Собственные вектора чисел λ_1 и λ_3 получены, имеют весьма сложный вид (здесь не приводятся) и не гарантируют для КЭ состояний растяжения и сжатия.

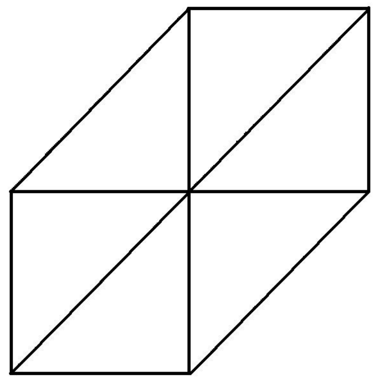

Рис. 2. Шесть треугольных КЭ.

На пути к аналитическому описанию предопределенности ГМЖ по ЛМЖ установлены два факта.

1) Для регулярной сетки треугольных КЭ, полученной из прямоугольной сетки размера Nx1, ГМЖ при соответствующей нумерации узлов является клеточно-ленточной матрицей весьма правильной структуры, что позволяет рассчитывать на получение, например, оценок спектра этой матрицы. Осложняет ситуацию заведомое отсутствие диагонального преобладания.

2) Доказано, что три ненулевых СЧ (всего собственных чисел 14, из них 3 нулевых) ГМЖ конструкции из шести треугольных КЭ, расположенных в форме шестиугольника (см. рис. 2) совпадают со всеми тремя ненулевыми СЧ ЛМЖ треугольного КЭ. Отсюда следует, что спектральное число обусловленности c_0 для ГМЖ шести треугольных КЭ больше или равно такого числа для ЛМЖ одного КЭ.

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

Из уравнения для λ_1 и λ_3 следует, что «дополнительное» вырождение ЛМЖ, то есть приближенное равенство $\lambda_3 \approx 0$ будет достигаться, если площадь КЭ будет близка к нулю, то есть $F \approx 0$. Вырождение же площади КЭ может возникать в двух случаях. Во-первых, размеры КЭ могут быть настолько малы, что хотя длины всех его сторон не равны нулю при установленной машинной точности расчетов, но произведение двух любых длин сторон уже приводит к машинному нулю. А так как F не превосходит произведения двух длин сторон, то и F будет равна нулю. Во-вторых, форма КЭ может быть настолько искажена, что хотя длины сторон КЭ велики, но F близка к нулю из-за малого значения синуса угла между сторонами.

Первый вариант из указанных при сделанных предположениях о регулярности сетки, очевидно, является неустойчивым «в целом». То есть, выбранный характерный размер КЭ не обеспечивает точности и устойчивости расчетов и должен быть изменен (увеличен).

Во втором варианте из формулы для ЛМЖ $[k_{loc}] = [B^T] \cdot [D] \cdot [B] \cdot F \cdot t$, где $[B]$ – матрица градиентов перемещений, $[D]$ – матрица упругих констант материала (или некоторое среднее по данному КЭ значение матрицы упруго-пластических констант), t – толщина КЭ, и того, что матрица $[B]$ обратно пропорциональна F, следует, что элементы $[k_{loc}]$ обратно пропорциональны F. Отсюда вытекает, что если F какого-то КЭ становится достаточно малой (существенно меньше чем у других элементов) (при примерном сохранении длин сторон КЭ), то, во-первых, его матрица $[k_{loc}]$ будет иметь только два ненулевых СЧ, и они будут примерно в $1/F$ раз больше ненулевых СЧ остальных ЛМЖ. Во-вторых, элементы его ЛМЖ $[k_{loc}]$ будут существенно больше, чем у других ЛМЖ, а тогда в составе ГМЖ эти элементы «перевесят» и, грубо говоря, эта ГМЖ будет состоять из огромных элементов этой $[k_{loc}]$ и остальных элементов – очень малых (примерно нулевых). Тогда у ГМЖ два СЧ будут близки этим ненулевым СЧ этой локальной матрицы $[k_{loc}]$.

Однако, ситуация, когда только один КЭ имеет площадь, близкую к нулю, может возникнуть лишь тогда, когда подвергается огромным искажениям именно этот единственный КЭ. При наличии регулярной достаточно мелкой сетки это представляется невозможным. Более реалистичным нужно полагать случай, когда значительным, примерно одинаковым искажениям подвергаются одновременно сразу несколько (много по сравнению с одним КЭ и мало по сравнению количеством всех КЭ) рядом расположенных КЭ. Но тогда элементы ЛМЖ этих КЭ будут одного порядка и при этом существенно больше, чем элементы ЛМЖ тех КЭ, которые мало искажены. Поэтому вклад ЛМЖ этих КЭ в ГМЖ будет значительным, по сравнению с другими КЭ. Следовательно, можно оценить наибольшие СЧ ГМЖ (снизу, так как все ЛМЖ неотрицательно определены) через наибольшие СЧ суммы ЛМЖ всех сильно искаженных КЭ. Усиливающим доводом является то, что суммы квадратов длин сторон сильно искаженных КЭ, как показывают расчеты, возрастают, что приводит к еще большему увеличению влияния их ЛМЖ на ГМЖ.

Будем считать, что указанная выше сумма ЛМЖ сильно искаженных КЭ **приемлемо аппроксимирует** снизу *m* штук наибольших СЧ ГМЖ, если выполняются неравенства $\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \ldots \lambda_m > \mu_m > \lambda_{m+1} > \lambda_{m+2} > \mu_{m+1}$. Здесь $\mu_1 > \mu_2 > \ldots \mu_K$ – собственные числа матрицы-суммы ЛМЖ сильно искаженных КЭ. Величина *m* вместе с относительной погрешностью $(\lambda_i - \mu_i)/\lambda_i$ является мерой качества аппроксимации.

Как указано в [1], наименьшее положительное СЧ матрицы $[KG_i]$ будет не меньше, чем наименьшее положительное СЧ ГМЖ любого «длинного» ряда КЭ (при сделанных предположениях о сетке «длинный» ряд – это соединенные вместе треугольные КЭ, образованные из прямоугольной сетки размера Nx1). Поэтому оценка снизу наименьшего положительного СЧ нерегуляризованной ГМЖ может быть сделана через наименьшее положительное СЧ клеточно-ленточной ГМЖ «длинного» ряда, что позволяет предполагать возможность построения аналитической оценки.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для уточнения диапазонов изменения геометрической формы КЭ достаточно наблюдать изменение площадей КЭ и сумм квадратов длин сторон, так как они определяют для КЭ спектр ЛМЖ. Определение диапазона физического состояния различных КЭ требует на каждом шаге внешних по отношению к КЭ данных (отражаемых не только в ГМЖ, но и в векторе нагрузок), поэтому в терминах КЭ невозможно. Установленные диапазоны позволяют оценить спектр нерегуляризованной ГМЖ СЛАУ МКЭ. Число $c_0([KG_i])$ тогда может быть оценено по результатам проделанных оценок СЧ.

Как указывалось в [1], при увеличении количества КЭ рано или поздно число $c_0([KG_i])$ станет недопустимо большим.

Из проведенных построений вытекают следующие выводы.

1) Целесообразно дальнейшее изучение алгебраических свойств ЛМЖ, их сумм, ГМЖ и их связи, так как установленные свойства позволили в работе [1] и данной работе построить алгоритм оценки невырожденности.

2) Оценка наибольшего СЧ нерегуляризованной ГМЖ может быть проведена по сильно искаженным КЭ.

3) Оценка наименьшего положительного СЧ нерегуляризованной ГМЖ может быть проведена по КЭ «длинного» ряда.

4) Приведен алгоритм оценки диапазона изменения формы КЭ.

5) Приведен алгоритм контроля невырожденности ГМЖ СЛАУ МКЭ по числу $c_0([KG_i])$. Полученные в данной статье оценки позволяют отслеживать динамику числа $c_0([KG_i])$.

Литература

1. *Иванов К.М. , Винник П.М., Иванов В.Н.* Численное моделирование разделительных процессов обработки давлением [Текст] / //Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета// №2 (33), 2012. –192-198 с.

2. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2008. 496 с.