

О необходимости определения производных на границах сетки сплайновых моделей геополей

On the necessity of determining derivatives on the grid boundaries of spline geofield models

Васильев / Vasiliev N.

Николай Павлович

(nikpv@mail.ru)

кандидат технических наук, доцент.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова» (СПбГЛУ им. С. М. Кирова),

доцент кафедры информационных систем и технологий.

г. Санкт-Петербург

Вагизов / Vagizov M.

Марсель Равильевич

(bars-tatarin@yandex.ru)

кандидат технических наук, доцент.

СПбГЛУ им. С. М. Кирова, заведующий кафедрой информационных систем и технологий.

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: сетки геополей – geofield meshes; сплайны – splines; интерполяция геополя – geofield interpolation; технология WebGL – WebGL technology; сглаживание поверхности – surface smoothing; данные SRTM – SRTM data.

В статье предлагается вариант сплайн-интерполяции регулярной неравномерной сетки точек геополя, не требующий в отличие от классического подхода определения значений производных на границах сетки. На основе предложенной эффективной схемы вычислений была разработана компьютерная модель, позволившая визуализировать результаты расчёта с помощью WebGL. Численный эксперимент, выполненный на примере широкого диапазона вариантов сеток высот SRTM-данных, даёт хорошее согласование с картой и позволяет предположить возможность использования предложенной математической модели для интерполяции иных видов геополей.

In article proposes a variant of spline interpolation of a regular irregular grid of geofield points, which does not require, unlike the classical approach, the determination of derivative values at the grid boundaries. On the basis of the proposed efficient computational scheme, a computer model was developed that allowed visualizing the computational results using WebGL. Numerical experiment performed on a wide range of SRTM-data height grids gives good agreement with the map and suggests the possibility of using the proposed mathematical model for interpolation of other types of geopoies.

Введение

Конструированию составных интерполяционных моделей поверхностей по заданной сетке точек посвящено огромное количество фундаментальных исследований [6]. Тем не менее интерес к теме остается,

и публикации продолжают [1, 2, 7]. Актуальность отчасти объясняется тем, что задача в полной мере не решена, поскольку имеющиеся классические решения требуют осторожности для регулярных неравномерных сеток [1, 2] и непригодны для нерегулярных сеток [7]. Вместе с тем в компьютерной графике конструирование составных поверхностей зачастую единственный подход, дающий приемлемый результат, в численной математике – это способ решения задачи интерполяции или, например, способ сглаживания сеточных функций при решении дифференциальных уравнений в частных производных конечно-разностными методами. В том числе задача остаётся актуальной для построения математических и компьютерных моделей геополей на основе данных дистанционного зондирования, SRTM-данных о высоте [9], данных геологической разведки и т. д.

В статье предлагается сплайновая интерполяционная модель и эффективная схема расчёта для регулярных неравномерных сеток точек, не требующая определения производных на их границах. Как известно, классическая вычислительная схема построения составной поверхности Фергюсона [8] применима только к равномерной сетке и требует знания производных на границах поверхности и кручений (смешанных производных) в её углах. Классическая сплайновая модель, которая схематично описана в [6], применима к неравномерной сетке, но опять же требует знания производных. Для одномерных сплайнов такое требование обычно обходят, определяя «свободные» концы сплайна, и в большинстве случаев такой подход даёт приемлемый результат. В статье подробно описана математическая модель и вычислительная схема на её основе, позволяющая использовать «свободные» концы для двумерного случая. Вычислительная схема была реализована

на JavaScript и WebGL, что позволило провести численный эксперимент на широком спектре SRTM-данных о высоте. Положительные результаты эксперимента дают основание предполагать возможность использования такого подхода для других источников данных геополей.

Предположим, что геополе задано сеткой точек:

$$P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (i = 0, \dots, m-1; j = 0, \dots, n-1).$$

Если геополе изначально определено в географических координатах (широта и долгота), то всегда можно перейти к декартовым координатам (x_{ij}, y_{ij}) [3]. Значение геополя определено в z_{ij} . Это могут быть данные дистанционного зондирования, SRTM-данные о высоте, данные геологической разведки и т. д. Сетка может быть неравномерной, координаты x_{ij} упорядочены по возрастанию с ростом индекса i , а координаты y_{ij} упорядочены по возрастанию с ростом индекса j .

Для визуализации геополя в WebGL (или OpenGL) требуется представить поверхность, проходящую через заданные точки, в виде композиции треугольников и определить нормали для каждой вершины каждого треугольника. Нормали необходимы WebGL для определения цвета вершин треугольников с учётом параметров освещения и дальнейшей их растеризации – вычисления цвета каждого пиксела [5].

Простой подход к решению задачи предполагает использование точек P_{ij} в качестве вершин триангуляции, а нормали к плоскостям треугольников – в качестве нормалей в их вершинах. Заметим, что в каждой вершине P_{ij} нормаль не определяется однозначно или терпит разрыв при переходе от одной треугольной грани к другой. Как показано в [3], такой подход даёт приемлемый результат, если сетка точек достаточно большая (m и $n > 200$), а точка наблюдения расположена на расстоянии, сравнимом с размерами всей поверхности. В таких условиях треугольные грани практически незаметны. При нарушении указанных условий грани поверхности становятся явными (рис. 1).

Очевидно, в этом случае требуется более подробная триангуляция. Эффект граней может быть снят непосредственно WebGL, если нормаль к поверхности в каждой точке P_{ij} будет определяться однозначно, а значит, однозначно будет определяться цвет общего вертекса каждого треугольника с вершиной в этой точке (нормаль определяет цвет). Для гранёной поверхности (рис. 1) в каждой вершине фактически определено несколько разных нормалей для каждого треугольника с этой общей вершиной. Если нормаль вычисляется однозначно, то смежные треугольники будут иметь одинаковые цвета в общих вершинах. Технология WebGL интерполирует цвета пикселов внутри каждого треугольника на основе цветов его вершин. В результате переход от одной грани к другой будет

выглядеть плавным – эффект граней будет частично снят (рис. 2).

Очевидно, математическая модель всей поверхности с непрерывной нормалью позволяет использовать оба подхода: рассчитывать вершины более мелкой триангуляции и (или) однозначно вычислять нормаль. На рис. 3 представлен результат воспроизведения с помощью WebGL триангуляции, построенной на основе вычисленной сетки 100 на 100.

Модель будем строить в параметрическом виде $r(u, v)$ так, что выполняются условия:

$$r(u_i, v_j) = P_{ij}, (i = 0, \dots, m-1; j = 0, \dots, n-1).$$

Здесь и в дальнейшем жирным шрифтом обозначаются вектора.

Параметризацию можно определить на основе исходных координат, например, выбрав строку J и столбец I в исходной сетке координат x_{ij} :

$$\begin{aligned} u_i &= x_{ij}, i = 0, \dots, m-1 \\ v_j &= y_{ij}, j = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Заметим, что от выбора параметризации зависит результат, особенно это касается сильно неравномерных сеток. Если сетка равномерная или близка к равномерной, то хорошим выбором будет однородная параметризация: $u_i = i, v_j = j$. Иначе следует выбирать ряд J и столбец I из иных соображений, которые здесь не обсуждаются. Также обратим внимание, что для того, чтобы изменение индекса i ассоциировалось с изменением абсциссы (и параметра u), а изменение индекса j с изменением ординаты (и параметра v), точки P_{ij} должны храниться «по столбцам», поскольку ось абсцисс обычно направлена горизонтально, а ординат – вертикально. Это замечание следует учитывать при реализации модели на языках программирования, где двумерный массив представляется массивом одномерных массивов-столбцов (например, JavaScript).

Для конструирования поверхности с заданными свойствами будем отталкиваться от классической сплайновой теории [6], однако предложим иные модели вычислений производных в узлах, которые дают ряд преимуществ в вычислительном плане и успешно опробованы на примере SRTM-данных. Для вычислительных экспериментов и проверки сделанных допущений была разработана компьютерная модель на Java Script и WebGL (использование указанных средств позволяет развернуть модель в браузере на любой платформе и сделать её доступной в глобальной сети).

Согласно классической теории поверхность конструируется из топологически-прямоугольных кусков (прямоугольных в u и v плоскости и кривоугольных в пространстве), которые в углах опираются на заданные точки P_{ij} , а по краям ограничены

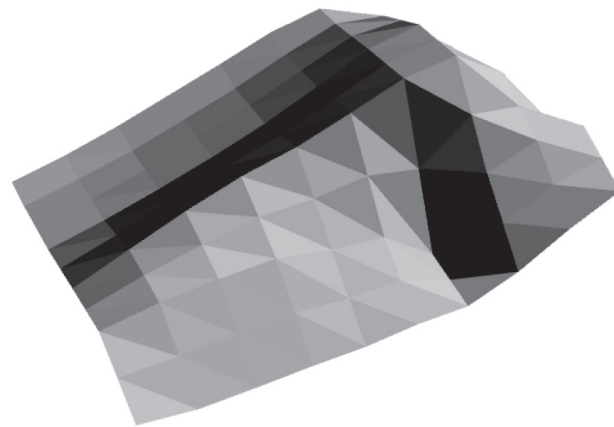


Рис. 1. Для небольших значений m и n ($m=10, n=10$) и (или) для расстояний до точки наблюдения, сравнимых с размерами сетки, явно заметны грани треугольников

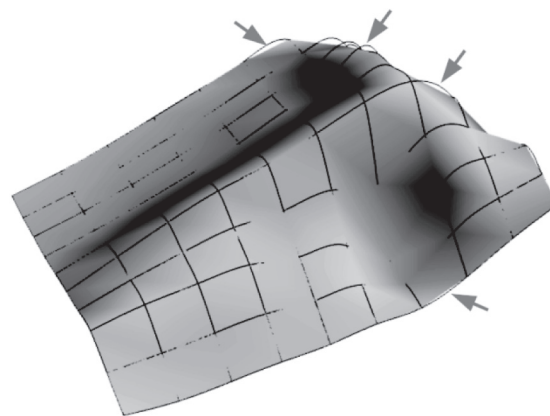


Рис. 2. Результат интерполяции цветов WebGL: эффект граней частично снят, однако заметны плоскости треугольников (показаны стрелками)

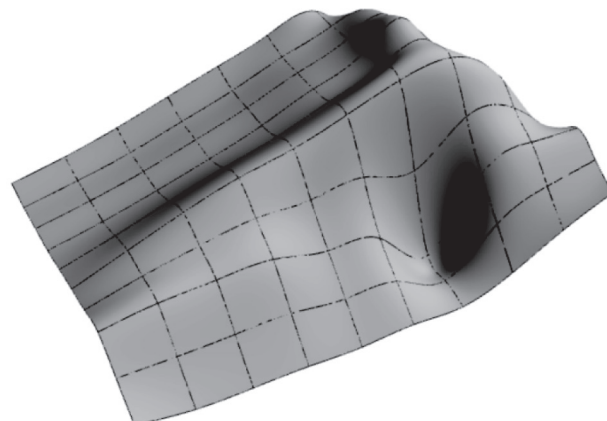


Рис. 3. Результат более мелкой триангуляции на основе прямоугольной сетки 100 на 100, вычисленной с помощью математической модели

кубическими кривыми в u -направлении и в v -направлении, представленными в форме Фергюсона [6, 8], то есть через крайние точки и производные в этих точках в u -направлении и в v -направлении. Заметим, что в рамках выбранного i, j -участка обычно используется «локальная» параметризация:

$$u' = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\alpha_i}, i = 0, \dots, m - 2$$

$$v' = \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j} = \frac{v - v_j}{\beta_j}, j = 0, \dots, n - 2$$

Если параметры u и v меняются в диапазонах $u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}$, то параметры u' и v' меняются от 0 до 1 и переход к локальной параметризации выполняется согласно формулам:

$$r(u, v) \equiv r(u' \alpha_i + u_i, v' \beta_j + v_j) \equiv R^{ij}(u', v').$$

Для i, j -участка (на рис. 4 представлен участок с $i = 1, j = 1$) имеем следующую модель:

$$r(u, v) = R^{ij}(u', v') = F(u') \begin{pmatrix} P_{ij} & P_{i,j+1} & r_v^{ij} \beta_j & r_v^{i+1,j} \beta_j \\ P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} & r_v^{i+1,j} \beta_j & r_v^{i+1,j+1} \beta_j \\ r_u^{ij} \alpha_i & r_u^{i,j+1} \alpha_i & r_{uv}^{ij} \alpha_i \beta_j & r_{uv}^{i+1,j} \alpha_i \beta_j \\ r_u^{i+1,j} \alpha_i & r_u^{i+1,j+1} \alpha_i & r_{uv}^{i+1,j} \alpha_i \beta_j & r_{uv}^{i+1,j+1} \alpha_i \beta_j \end{pmatrix} F^T(v'). \quad (1)$$

Здесь вектора

$$F(u') = [1 - 3u'^2 + 3u'^3, 3u'^2 - 2u'^3, 1 - 2u'^2 + u'^3, -u'^2 + u'^3]$$

$$F(v') = [1 - 3v'^2 + 3v'^3, 3v'^2 - 2v'^3, 1 - 2v'^2 + v'^3, -v'^2 + v'^3]$$

представляют функции смещения.

Обратим внимание, что в представленных формулах производные r_u, r_v, r_{uv} вычисляются по «глобальным» параметрам u и v в узлах сетки, номера которых указывают верхние индексы, например:

$$r_u^{(i,j+1)} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_i, v_{j+1}) = \frac{\partial R^{i,j+1}}{\partial u'} \alpha_i \quad (1).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению в узлах сетки производных в u и v направлениях, то есть r_u и r_v , а также смешанных производных r_{uv} .

Вычисление производных r_u и r_v

Для вычисления r_u будем строить сетку из n кривых в u -направлении:

$$L^j(u) \equiv r(u, v_j), j = 0, \dots, n - 1,$$

проходящих через заданные точки P_{ij} (j – фиксировано):

$$L^j(u_i) \equiv r(u_i, v_j) = P_{ij}, i = 0, \dots, m - 1.$$

Аналогично для вычисления r_v – сетку m кривых в v -направлении:

$$E^i(v) \equiv r(u_i, v), i = 0, \dots, m - 1,$$

проходящих через заданные точки P_{ij} (j – фиксировано):

$$E^i(v_j) \equiv r(u_i, v_j) = P_{ij}, i = 0, \dots, m - 1,$$

Таким образом, требуется решить $m + n$ интерполяционных задач. Воспользуемся сплайн-интерполяцией, позволяющей получить результат с непрерывной касательной и кривизной. Как известно [4], сплайн на каждом из участков между узлами задаётся

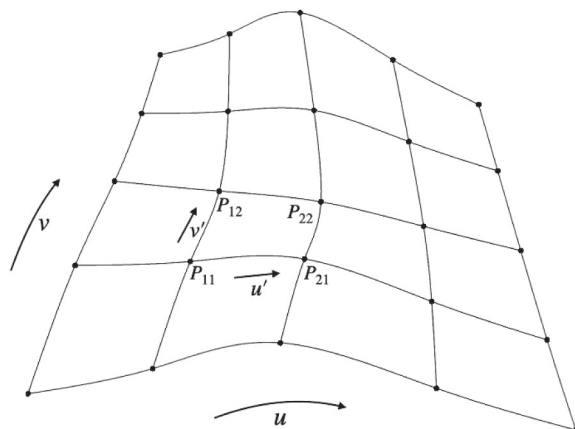


Рис. 4. Топология сетки точек. Локальные параметры u' и v' . Глобальные параметры u и v .

кубической кривой, коэффициенты которой определяются из соображений гладкой сшивки соседних участков в узлах по касательной (первая производная) и кривизне (вторая производная). Сшивку можно реализовать двумя способами. Первый способ предполагает использовать в качестве неизвестных первые производные в узлах, а для их вычисления условия равенства в узлах вторых производных соседних участков [6]. При этом требуется задать значения производных r_u и r_v в узлах на границах прямоугольного участка изменения параметров u и v ($[u_0, u_{m-1}] \times [v_0, v_{n-1}]$). Заметим, что обычно взять эти значения неоткуда, или для их определения необходимы дополнительные данные и расчёты.

В статье используется иной способ расчёта сплайнов, который не требует определения первых производных на границах. Будем строить сплайн $L^j(u)$ и отталкиваться от неизвестных значений вторых производных в узлах сплайна. Неизвестные вторые производные обозначим:

$$s_i^j = \frac{d^2 L^j(u_i)}{du^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}(u_i, v_j), i = 0, \dots, m-1.$$

Если известны вторые производные, то i -й кусок сплайна на участке $[u_{i-1}, u_i]$ определяется соотношением:

$$L_i^j(u) = \frac{s_{i-1}^j (u_i - u)^3 + s_i^j (u - u_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{P_{i-1,j}}{h_i} - \frac{s_{i-1}^j h_i}{6} \right) (u_i - u) + \left(\frac{P_{i,j}}{h_i} - \frac{s_i^j h_i}{6} \right) (u - u_{i-1}), \quad (2)$$

где $h_i = u_i - u_{i-1}$

Это представление использует вторые производные, вычисленные на концах участка, и менее известно, чем представление Фергюсона, в котором используются первые производные. Его можно получить интегрированием выражения для линейной интерполяции второй производной на участке $u \in [u_{i-1}, u_i]$, а неизвестные интегрирования вычислить из условий прохождения кривой через точки $P_{i-1,j}$ и $P_{i,j}$ [КГГ].

Нам также потребуется первая производная:

$$\frac{dL_i^j(u)}{du} = \frac{-s_{i-1}^j (u_i - u)^2 + s_i^j (u - u_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_i} - \frac{(s_i^j - s_{i-1}^j)h_i}{6}. \quad (3)$$

На концах сплайна (то есть для $u = u_0$ и $u = u_n$) соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dL_1^j(u_0)}{du} &= -\frac{h_1}{3} s_0^j - \frac{h_1}{6} s_1^j + \frac{P_{1,j} - P_{0,j}}{h_1}, \\ \frac{dL_{m-1}^j(u_n)}{du} &= \frac{h_{m-1}}{6} s_{m-2}^j + \frac{h_{m-1}}{3} s_{m-1}^j + \frac{P_{m-1,j} - P_{m-2,j}}{h_{m-1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия равенства первой производной в узлах соседних участков («сшивка» первой производной):

$$\left\{ \begin{aligned} h_i s_{i-1}^j + 2(h_i + h_{i+1}) s_i^j + h_{i+1} s_{i+1}^j &= 6 \left(\frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_i} \right), \\ i &= 1, \dots, m-2 \end{aligned} \right.$$

Это система из $m-2$ уравнений с m неизвестными, которую следует замкнуть и дополнить двумя недостающими условиями. При расчёте сетки кривых концы сплайна будем считать свободными – получаем два недостающих условия: $s_0^j = 0, s_{m-1}^j = 0$. Таким образом, не требуется явное определение значений первой производной на концах.

Однако, забегая вперёд, отметим, что для вычисления смешанных производных r_{uv} значения первых производных на концах (они уже будут вычислены к этому моменту) потребуются указать явно (обозначим их α^j и β^j). Тогда дополнительные условия имеют иной вид:

$$\begin{aligned} -\frac{h_1}{3} s_0^j - \frac{h_1}{6} s_1^j &= \alpha^j - \frac{P_{1,j} - P_{0,j}}{h_1}, \\ \frac{h_{m-1}}{6} s_{m-2}^j + \frac{h_{m-1}}{3} s_{m-1}^j &= \beta^j - \frac{P_{m-1,j} - P_{m-2,j}}{h_{m-1}}. \end{aligned}$$

С учётом двух вариантов дополнительных условий имеем следующую систему линейных уравнений с ленточной матрицей коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2} & b_{m-2} & c_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^j \\ s_1^j \\ \vdots \\ s_{m-2}^j \\ s_{m-1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0^j \\ d_1^j \\ \vdots \\ d_{m-2}^j \\ d_{m-1}^j \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Коэффициенты первого и последнего уравнения будут вычисляться по-разному в зависимости от выбранного варианта дополнительных условий. Для свободных концов: $b_0 = 1, c_0 = 0, d_0^j = 0$ и $a_{m-1} = 1, b_{m-1} = 0, d_{m-1}^j = 0$. Для заданных значений производных:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{h_1}{3}, c_0 = -\frac{h_1}{6}, d_0^j = \alpha^j - \frac{P_{1,j} - P_{0,j}}{h_1}, \\ a_{m-1} &= \frac{h_{m-1}}{6}, b_{m-1} = \frac{h_{m-1}}{3}, d_{m-1}^j = \beta^j - \frac{P_{m-1,j} - P_{m-2,j}}{h_{m-1}}. \end{aligned}$$

Для остальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_i &= h_i, i = 1, \dots, m-2 \\ b_i &= 2(h_i + h_{i+1}), i = 1, \dots, m-2 \end{aligned}$$

$$c_i = h_{i+1}, i = 1, \dots, m-2$$

$$d_i^j = 6 \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_{i+1}} - 6 \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_i}, i = 1, \dots, m-2.$$

Заметим, что это векторная система уравнений – жирным выделены вектора. В скалярном виде это три системы для каждой из координат.

Система имеет ленточную структуру и эффективно решается прогонкой [КГГ]. Вычислительная схема прогонки реализуется в два этапа: прежде всего выполняется прямая прогонка, а затем по результатам прямой прогонки выполняется обратная прогонка, в ходе которой уже окончательно вычисляются неизвестные вторые производные. Прямая прогонка:

$$p_0 = -\frac{c_0}{b_0}, q_0^j = \frac{d_0^j}{b_0}, p_i = -\frac{c_i}{a_i p_{i-1} + b_i},$$

$$q_i^j = \frac{d_i^j - a_i q_{i-1}^j}{a_i p_{i-1} + b_i}, i = 1, \dots, m-1.$$

Это рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов $p_i, q_i^j (i = 0, \dots, m-1)$, которые используются в ходе обратной прогонки:

$$s_{m-1}^j = q_{m-1}^j,$$

$$s_i^j = p_i s_{i+1}^j + q_i^j, i = m-2, \dots, 0.$$

Вычисленные вторые производные позволяют рассчитать составной сплайн (2) для каждого j , то есть сетку кривых $L^j(u)$. Аналогично рассчитывается сетка кривых $E^i(v)$. Для вычисления производных r_u и r_v в узлах теперь можно воспользоваться соотношением (3).

Вычисление смешанных r_{uv} производных (кручений)

Во-первых предположим, что изменение последовательности дифференцирования не имеет значения, то есть $r_{uv} = r_{vu}$. В [6] для равномерной сетки это доказано. Для неравномерной сетки ограничимся согласованием результатов численного эксперимента.

Рассмотрим вычисленные на предыдущем этапе производные r_u в узлах вдоль границы $u = u_0$, соответствующих значениям параметра $v = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$, то есть изменение производной по u в направлении v . Если обозначить $T^0(v) \equiv r_u(u_0, v)$, то получим следующую интерполяционную задачу:

$$T^0(v_j) = t_j^0 \equiv r_u(u_0, v_j) (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Для её решения построим сплайн со свободными концами, аналогичный (2):

$$T^0(v) = \frac{(g_{j-1}^0(v_j - v)^3 + g_j^0(v - v_{j-1})^3)}{6\delta_j} + \left(\frac{t_{j-1}^0}{\delta_j} - \frac{g_{j-1}^0 - \delta_j}{6} \right) (v_j - v) + \left(\frac{t_j^0}{\delta_j} - \frac{g_j^0 \delta_j}{6} \right) (v - v_{j-1}),$$

где $\delta_j = v_j - v_{j-1}, v \in [v_{j-1}, v_j], (j = 1, 2, \dots, n-1)$.

Заметим, что здесь неизвестные вторые производные $g_j^0 \equiv \frac{d^2 T^0(v)}{dv^2}$ вычисляются в результате сшивки соседних участков сплайна (решения системы, аналогичной (5)). Полученное выражение позволяет вычислить смешанные производные на левой ($u = u_0$) границе

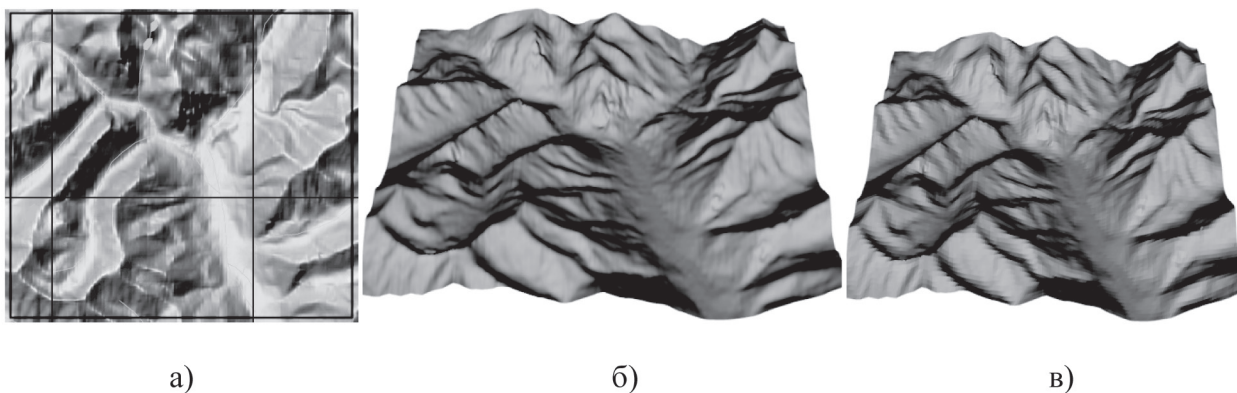


Рис. 5. Математическая модель построена на основе SRTM-сетки высот $m=180, n=90$.

- а) полное согласование карты с моделью;
- б) модель расчёта более мелкой сетки $M=300, N=200$ и нормали в её узлах для воспроизведения средствами WebGL;
- в) гранёный вариант по исходной сетке $m=180, n=90$ (при увеличении видны грани)

сетки $r_{uv}(u_0, v_j) \equiv \frac{d^2 T^0(v_j)}{dv^2}$. Заметим, что при этом не потребовалось знание кручений на концах (то есть в углах прямоугольной области изменения параметров), как в классических схемах. Аналогичный сплайн $T^{m-1}(v)$ следует построить на противоположной границе $u = u_{m-1}$ и вычислить кручения $r_{uv}(u_{m-1}, v_j)$ в её узлах.

Для вычисления смешанных производных в оставшихся узлах между левой и правой границами сетки рассмотрим изменение значений производной r , в направлении изменения параметра u . Зафиксируем v_j и рассмотрим соответствующий ряд узлов сетки в направлении изменения параметра u . Получим следующую интерполяционную задачу:

$$W^j(u_i) = r_{uv}(u_i, v_j) (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Заметим, что производные функции $W^j(u)$ в крайних узлах уже вычислены, действительно:

$$\frac{dW^j(u_0)}{du} = r_{uv}(u_0, v_j) = \alpha^j, \quad \frac{dW^j(u_{m-1})}{du} = r_{uv}(u_{m-1}, v_j) = \beta^j.$$

Эти условия будем использовать для построения сплайна вместо свободных концов. Схема вычислений остаётся прежней и сводится к решению системы вида (5), в которой коэффициенты вычисляются согласно варианту с заданными значениями производной на концах.

Следует обратить внимание, что можно было бы сначала вычислить смешанные производные в узлах вдоль верхней и нижней границ и их значения использовать в качестве дополнительных условий для сшивки сплайн-интерполяции производных по u в u направлении. Результат может быть иным.

Представленная математическая модель имеет непрерывную нормаль (и касательную плоскость). Схема расчёта не требует знания производных на границах сетки, как в классических схемах сплайновой интерполяции, является устойчивой и эффективной даже при больших размерах сетки.

Выводы

На основе представленной модели была разработана компьютерная модель, позволяющая получить трёхмерное изображение поверхности по заданной сетке точек геопоя. Компьютерная реализация позволила провести вычислительный эксперимент на примере SRTM-данных. Выбирались достаточно пересечённые пробные участки местности и различные размеры сетки высот. Визуальное представление геопоя даёт хорошее согласование с картой (рис. 5).

Литература

1. Аульченко, С. М. Построение поверхностей с помощью параметрических полиномов / С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 3. – С. 356–364.
2. Ахметшина, Л. Г. Мультимодельный метод нечёткой интерполяции пространственных данных на неравномерной сетке / Л.Г. Ахметшина, Т.С. Ямнич // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3. – С. 56–61.
3. Васильев, Н. П. Рендеринг регулярной сетки высот рельефа местности с помощью WebGL и естественной триангуляции / Н.П. Васильев, М.Р. Вагизов // Геодезия и картография. – 2022. – Т. 83, № 12. – С. 49–56.
4. Васильев, Н. П. Компьютерная геометрия и графика в web-разработке / Н.П. Васильев. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 156 с.
5. Коичи, М. WebGL: Программирование трехмерной графики / М. Коичи, Л. Роджер. – Москва : ДМК Пресс, 2019. – 494 с.
6. Фокс, А. Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт ; пер. с англ. Г.П. Бабенко, Г.П. Воскресенский. – Москва : Мир, 1982. – 304 с.
7. Тюкачев, Н. А. Сгущение триангуляции поверхности со сглаживанием / Н.А. Тюкачев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 2. – С. 33–38.
8. Ferguson, J. C. Multivariable curve interpolation / J.C. Ferguson // J. ACM. – 1964. – Vol. 11. – P. 221–228.
9. SRTM Data // Официальный сайт : данные SRTM. – URL: <https://srtm.csi.cgiar.org/srtmdata/> (дата обращения 09.11.2023).