УДК 681.326.74.06

Алгоритм построения оптимальной диагностической процедуры по показателю ценности информации на основе принципа максимума Понтрягина

Algorithm for constructing of the optimal diagnostic procedure by the value of information indicator on the base of Pontryagin's maximum principle

Копкин / Kopkin E.
Евгений Вениаминович
(vka@mail.ru)
доктор технических наук, профессор.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ (ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор кафедры технологий и средств автоматизированной обработки и анализа информации космических средств.
г. Санкт-Петербург

Деев / Deev V.
Владимир Викторович
(vka@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
действительный член МАИ.
ВКА им. А. Ф. Можайского,
преподаватель кафедры технологий и средств автоматизированной обработки и анализа информации космических средств.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: техническое состояние – technical state; гибкая диагностическая процедура – flexible diagnostic procedure; принцип максимума – maximum principle; ценность информации – information value.

Рассматривается задача оптимизации процесса определения технического состояния объекта контроля на основе использования дискретного варианта принципа максимума Понтрягина. В качестве оптимизируемого показателя используется ценность диагностической информации, получаемой в процессе выполнения проверок диагностических признаков, имеющих интервальную форму представления. Указанный показатель базируется на мере ценности информации Р. Л. Стратоновича, модифицированной применительно к предметной области контроля и диагностики. Приводится пример реализации алгоритма.

The problem of optimizing the process of recognition the technical state of the control object based on the use of a discrete version of the Pontryagin's maximum principle is considered. The optimized indicator is the value of diagnostic information obtained in the process of performing checks of diagnostic features that have an interval form of representation. This indicator is based on the R. L. Stratonovich's information value measure, modified in relation to the subject area of control and diagnostics. The example of implementation of the developed algorithm is given.

Введение

Одним из основных методов, используемых для оптимизации процессов анализа технического состояния сложных систем, является метод динамического программирования (МДП). Его применение позволяет осуществлять синтез оптимальных по различным критериям гибких диагностических процедур (ГДП) для определения технического состояния (ТС) объекта [1].

Поскольку не существует универсальной формы реализации МДП, то для каждой конкретной оптимизационной задачи необходимо разрабатывать свою алгоритмическую схему, что является очевидным недостатком метода помимо его высокой трудоемкости.

Принцип максимума Л. С. Понтрягина, в том числе его дискретный вариант [2–7], от этого недостатка в значительной мере свободен. На основе использования принципа максимума успешно решен ряд задач для различных практических приложений [8–12].

Между тем оптимизация процессов анализа ТС объектов, описываемых дискретными вероятностно-динамическими моделями автоматного типа, на основе использования принципа максимума практически не используется.

Известны лишь несколько работ, например [13], в которых предложены алгоритмы построения диагностических процедур, оптимальных по таким показателям, как информативность и полезность информации (по А. А. Харкевичу) на основе использования принципа максимума.

Мера ценности информации, предложенная Р. Л. Стратоновичем [14], была использована для оптимизации процесса диагностирования [15, 16] методом динамического программирования.

В связи с тем, что принцип максимума коренным образом отличается от МДП и обладает целым рядом достоинств, его применение для построения оптимальных диагностических процедур представляет научный и практический интерес.

Постановка задачи

Полагаем, что анализируемый объект может находиться в одном из множества $\mathsf{S}=\left\{S_i \middle| i=\overline{1,m}\right\}$ заданных технических состояний. Информацию о ТС объекта получают путем измерения значений диагностических признаков (ДП), образующих множество $\Pi=\left\{\pi_j \middle| j=\overline{1,n}\right\}$. Диапазоны возможного разброса значений каждого ДП $\pi_j \in \Pi$ в каждом из заданных ТС $S_i \in \mathsf{S}$ формируют множество $L=\left\{\ell_{ij} \middle| i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right\}$ модельных интервалов, на котором все ТС являются попарно различимыми. Диагностическая информация (ДИ) поступает с объекта в виде измеренных значений y_j соответствующих ДП. Эти значения представляют собой вещественные числа, имеющие равномерный закон распределения внутри интервалов $\ell_{ij} \in L$. Измерение текущего значения y_j признака $\pi_j \in \Pi$ и выявление его принадлежности одному или нескольким интервалам $\ell_{ij} \in L$ называется проверкой, совокупность которых образует множество $\hat{\Pi}=\left\{\hat{\pi}_j \mid j=\overline{1,n}\right\}$ проверок, взаимно однозначно соответствующее множеству Π.

Поскольку интервалы $\ell_{ij} \in L$, соответствующие различным ТС $S_i \in \mathsf{S}$ для признака $\pi_j \in \Pi$ могут пересекаться между собой, возникает неопределенность в определении конкретного ТС, в котором находится объект. В связи с этим введем в рассмотрение понятие «информационное состояние» (ИС) процесса анализа, характеризующее степень неопределенности ТС объекта. Каждое ИС представляет собой виртуальную структуру − подмножество множества S, состоящее из «подозреваемых» ТС, в одном из которых может находиться объект в момент анализа его состояния. Совокупность ИС образует множество $\Omega=\left\{R_k \middle| k=\left\langle \{i\}, i=\overline{1,m} \right\rangle\right\}$, элементы которого $R_k \subseteq \mathsf{S}$ различаются по их мощности. Одноэлементные множества $R_i=\{S_i\}$, $i=\overline{1,m}$, называются конечными ИС, так как неопределенность в этом случае отсутствует. ИС, для которых $2 \le \mathrm{card}\{R_k\} \le m$, называются промежуточными, в том числе начальное (исходное) ИС $R_k=\mathsf{S}$. Каждое ИС $R_k \subseteq \mathsf{S}$ характеризуется своей вероятностью $P(R_k)$, используемой в случайном процессе выбора проверок, выполняемых при определении ТС.

При выполнении проверок $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}$ следует выбирать только такие из них, с помощью которых можно отличить хотя бы одно ТС S_i от других. Эти проверки будем называть допустимыми. Каждому ИС $R_k \subseteq \mathsf{S}$ (кроме конечных) поставим в соответствие множество $\hat{\Pi}_k$ допустимых проверок

$$\hat{\Pi}_k=\left\{\hat{\pi}_j \middle| \hat{\pi}_j \in \hat{\Pi} : \forall S_i \in \mathsf{S}, \forall S_f \in \mathsf{S} \setminus \{S_i\}, \ell_{ij} \cap \ell_{fj} = \varnothing\right\}. \quad (1)$$

В результате выполнения проверки $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_k$ измеренное значение y_j попадает в некоторый обобщенный интервал $\nabla_{kj}=\bigcup_{\{i:S_i \in R_k\}} \ell_{ij}$, объединяющий модельные интервалы, соответствующие возможным значениям признака $\pi_j \in \Pi_k$ в ТС $S_i \in R_k$. Интервал ∇_{kj} разделяется на конечное число ω_{kj} подынтервалов Δ_{kj}, в любой из которых может попасть измеренное значение y_j признака π_j. Количество ω_{kj} получаемых подынтервалов Δ_{kj} соответствует числу возможных исходов проверки $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_k$, выполняемой в ИС R_k. Присвоив каждому подынтервалу Δ_{kj} порядковый номер v, определим исход проверки как событие, при осуществлении которого измеренное значение y_j попадает в один из подынтервалов $\Delta_{kj}^v=\bigcap_{\{i:S_i \in R_{kj}^v\}} \ell_{ij}$, т. е. $y_j \in \Delta_{kj}^v \left(v=\overline{1,\omega_{kj}}\right)$.

До начала процесса анализа объект находится в ИС $R_k=\mathsf{S}$, характеризуемом максимальной неопределенностью. В процессе выполнения проверок исходная неопределенность ТС объекта уменьшается за счет перехода процесса анализа из одного ИС R_k в другое, содержащее меньшее число элементов S_i. При достижении одного из конечных ИС $R_i=\{S_i\}$, $i=\overline{1,m}$, процесс выполнения проверок завершается, так как ТС объекта считается определенным.

Отображение, с помощью которого осуществляется переход от одного ИС R_k к другому при воздействии проверки $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_k$, имеет следующий вид:

$$\hat{\pi}_j:\ R_k \to R_{kj}^v, \text{если } y_j \in \Delta_{kj}^v \ \left(v=\overline{1,\omega_{kj}}\right), \quad (2)$$

где $R_{kj}^v=\left\{S_i \middle| S_i \in R_k, y_j \in \Delta_{kj}^v\right\} \subset R_k$ − v-й исход проверки; $\mathrm{card}\{R_{kj}^v\} < \mathrm{card}\{R_k\}$.

При реализации отображения (2), которое можно назвать «проектором», исходное пространство состояний проектируется на его подпространства меньшей размерности, что можно отразить в следующем виде:

$$R_{kj}^v=\hat{\pi}_j(R_k)=R_k \setminus \ker \hat{\pi}_j(R_k); \quad (3)$$

$$R_{kj}^v=\hat{\pi}_j(R_k)=\mathrm{im}\, \hat{\pi}_j(R_k), \quad (4)$$

где

$$\ker \hat{\pi}_j(R_k)=\left\{S_i \mid S_i \in R_k, \hat{\pi}_j(S_i)=0_{\langle n\rangle}\right\};$$

$$\mathrm{im}\, \hat{\pi}_j(R_k)=\left\{S_i \mid S_i \in R_k, \hat{\pi}_j(S_i)=S_i\right\};$$

$0_{\langle n\rangle}$ − вектор, состоящий из нулей.

Поскольку исходы проверок представляют собой случайные события, то для вычисления вероятностей $P_k\left(\hat{\pi}_j^v\right)$ этих исходов будем использовать формулу

$$P_k\left(\hat{\pi}_j^v\right)=P\left(R_{kj}^v / R_k\right)=\frac{|\Delta_{kj}^v|}{|\nabla_{kj}|}=\left(\left|\bigcap_{\{i:S_i \in R_{kj}^v\}} \ell_{ij}\right|\right)\cdot\left(\left|\bigcup_{\{f:S_f \in R_k\}} \ell_{fj}\right|\right)^{-1}. \quad (5)$$

В результате необходимо для каждого из $S_i \in \mathsf{S}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ определить упорядоченные (по очередности их выполнения) подмножества проверок $\hat{\Pi}_r \subseteq \hat{\Pi}$, обеспечивающие попарную различимость всех заданных ТС, т. е.

$$\hat{\Pi}_r = \left\{ \hat{\pi}_j \middle| \hat{\pi}_j \in \hat{\Pi} : \forall S_i \in \mathsf{S}, \forall S_f \in \mathsf{S} \setminus \left\{ S_i \right\}, \ell_{ij} \bigcap \ell_{fj} = \varnothing \right\}.$$

Индекс r обозначает порядковый номер подмножества, так как при интервальной форме представления ДП достижение конечных ИС R_i={S_i} может осуществляться различными наборами упорядоченных проверок.

Определив все подмножества $\hat{\Pi}_r \subseteq \hat{\Pi}$, получим множество проверок $\hat{\Pi}^* = \bigcup_r \hat{\Pi}_r$, которое вместе с правилами их выполнения формирует ГДП анализа ТС объекта. Для наглядности будем представлять ГДП в виде ориентированного графа G, содержащего одну начальную и m конечных вершин. Вершины графа – ИС R_k, дуги – исходы $\hat{\pi}_j^v$ проверок, выполняемых в этих ИС. Каждая из ветвей G_r графа G соответствует подмножеству $\hat{\Pi}_r$ и приводит к конкретному ТС S_i.

Оптимизационная задача состоит в выборе для каждого из анализируемых ИС $R_k \subseteq \mathsf{S}$ такой проверки, чтобы в совокупности найденные подмножества $\hat{\Pi}_r$ позволяли определять соответствующие ТС объекта наилучшим образом в смысле выбранного показателя оптимизации. В качестве оптимизируемого показателя будем использовать показатель ценности ДИ, получаемой при выполнении проверок в процессе определения ТС объекта, базирующийся на мере ценности информации, предложенной Р. Л. Стратоновичем [14]. Физический смысл этой меры заключается в том, что более ценной будет та информация, при получении которой достигается минимум определенной функции «штрафов» («потерь»), получаемых при достижении некоторой цели.

Обоснование возможности использования меры ценности Р. Л. Стратоновича для оптимизации процесса определения ТС объекта и алгоритмизация этого процесса на основе МДП и при использовании интервальной формы представления ДП приведены в работе [16]. Воспользуемся результатами этой работы для описания основных математических формализмов, используемых для решения поставленной задачи.

Средняя ценность $V(G)$ ДИ, получаемой при реализации уже построенной ГДП анализа ТС объекта, вычисляется по формуле

$$V(G) = \sum_{R_k \in \Omega_k} P(R_k) \sum_{v=1}^{\omega_{kj}} (\beta_v - \alpha_v) P_k(\hat{\pi}_j^v) \left[\omega_{kj} P_k(\hat{\pi}_j^v) - 1 \right], \tag{6}$$

где $P(R_k)$ – вероятность реализации ИС R_k; $\Omega_k = \Omega \setminus \{R_i\} \left(i = \overline{1, m}\right)$ – множество неконечных ИС; α_v>0 и $\beta_v > \alpha_v$ – «потери» («затраты») при выполнении проверки в зависимости от подтверждения или отклонения гипотезы о возможном исходе проверки, принятой за основную.

Пока не определен порядок вычисления «потерь», которые получаются при выполнении проверок, формулу (6) можно упростить, приняв два допущения:

– если при выполнении проверки получит подтверждение гипотеза об ее исходе, принятая в качестве основной, то «потери» отсутствуют, т.е. α_v=0;

– если при выполнении проверки основная гипотеза будет отклонена, то «потери» примем равными единице, т. е. β_v=1.

Тогда вместо (6) будем использовать выражение

$$V(G) = \sum_{R_k \in \Omega_k} P(R_k) \sum_{v=1}^{\omega_{kj}} P_k(\hat{\pi}_j^v) \left[\omega_{kj} P_k(\hat{\pi}_j^v) - 1 \right], \tag{7}$$

в котором значения вероятностей $P(R_k)$ вычисляются по формуле

$$P(R_k) = \sum_r \prod_{\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_r^k} P_k(\hat{\pi}_j^v), \tag{8}$$

где $\hat{\Pi}_r^k$ – подмножества проверок, входящих в r-ю ветвь ГДП.

Если для оптимизации процесса определения ТС объекта используется МДП, то вычисление значений оптимизируемого показателя осуществляется рекуррентным образом. Рекуррентная формула для вычисления среднего значения ценности ДИ, получаемой при выполнении проверки $\hat{\pi}_j$ в ИС R_k, имеет следующий вид [16]:

$$V_k(\hat{\pi}_j) = \sum_{v=1}^{\omega_{kj}} P_k(\hat{\pi}_j^v) \left[\omega_{kj} P_k(\hat{\pi}_j^v) - 1 + V_{kj}^v(\hat{\pi}_s) \right], \tag{9}$$

где $V_{kj}^v(\hat{\pi}_s)$ представляет собой ценность той ДИ, которая будет получена при выполнении последующих проверок $\hat{\pi}_s$, необходимых для реализации ветви ГДП, приводящей из ИС R_{kj}^v в одно из конечных состояний $S_i \subset R_{kj}^v$.

Построение оптимальной гибкой диагностической процедуры на основе использования дискретного варианта принципа максимума

Обоснуем возможность использования дискретного варианта принципа максимума для построения оптимальной ГДП по показателю ценности ДИ.

Так же, как в работе [13], проведем аналогии между математическими выражениями, описывающими процесс определения оптимального управления, представленными, например, в работе [6], и формулами, с помощью которых осуществляется оптимизация процесса определения ТС объекта.

Нетрудно заметить, что отображение (2), описывающее переход от ИС R_k к другому ИС R_{kj}^v под действием проверки $\hat{\pi}_j$, а также выражения (3) и (4), формализующие рассматриваемые ИС, являются аналогом уравнения, которое описывает поведение

1 2024 2.indd 67 21.03.2024 15:29:24

объекта управления с учетом выдачи на него управляющих воздействий. Таким же образом определим, что выражение (7) для расчета среднего значения $V(G)$ ценности ДИ, получаемой при определении ТС объекта по уже синтезированной программе, является аналогом функционала качества управления. Исходя из этих предположений, аналогом функции Гамильтона для исхода R_{kj}^{v}, получаемого при выполнении в ИС R_k проверки $\hat{\pi}_j$, будет следующее выражение:

$$H_{kj}^{v}\left(\Psi_{kj}^{v}, R_k\right) = \psi_{kj}^{v}\left|\Delta_{kj}^{v}\right| - P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right)\left[\omega_{kj} P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right) - 1\right],$$

где ψ_{kj}^{v} – вспомогательный коэффициент. Для выбора оптимальной проверки $\hat{\pi}_j^{\text{опт}}$, переводящей процесс анализа ТС из исходного ИС R_k в новое ИС R_{kj}^{v}, согласно отображению (2) необходима так называемая сопряженная система [6], которая составляется относительно рассматриваемых коэффициентов $\psi_{kj}^{v}\left(v = \overline{1, \omega_{kj}}\right)$.

При формировании аналога функции Гамильтона для проверки $\hat{\pi}_j$, выполняемой в ИС R_k, в силу случайного характера реализации возможных исходов $R_{kj}^{v}\left(v = \overline{1, \omega_{kj}}\right)$ следует усреднить гамильтонианы $H_{kj}^{v}\left(\Psi_{kj}^{v}, R_k\right)$ по всем этим исходам, т. е. $H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right) = M\left\{H_{kj}^{v}\left(\Psi_{kj}^{v}, R_k\right)\right\}$.

Путем несложных преобразований в результате получим гамильтониан вида

$$H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right) = \sum_{v=1}^{\omega_{kj}} P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right)\psi_{kj}^{v} - \sum_{v=1}^{\omega_{kj}} P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right)\left[\omega_{kj} P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right) - 1\right]. \tag{10}$$

Сравнение формул (9) и (10) показывает, что рекуррентные слагаемые $V_{kj}^{v}\left(\hat{\pi}_s\right)$ и вспомогательные коэффициенты ψ_{kj}^{v} имеют один и тот же смысл, а именно – они характеризуют ценность ДИ, получаемой при выполнении дальнейших проверок. И чтобы эти коэффициенты рассчитать, необходимо принять R_{kj}^{v} как новое исходное ИС, определить все возможные упорядоченные наборы проверок, переводящие ИС R_{kj}^{v} в R_i, и выбрать наиболее «ценные» проверки.

Значения ψ_{kj}^{v} зависят от количества ТС S_i, входящих в состав ИС R_{kj}^{v}. Если ИС $R_{kj}^{v} = \left\{S_i\right\}\left(i : S_i \subset R_{kj}^{v}\right)$, то $\psi_{kj}^{v} = 0$. Если ИС R_{kj}^{v} содержит в своем составе только два ТС, тогда значение ψ_{kj}^{v} определяется, исходя из условия [16]:

$$\psi_{kj}^{v} = \min_{\hat{\pi}_s \in \hat{\Pi}_{kj}^{v}}\left\{-\left[P_{kj}^{v}\left(\hat{\pi}_s^{1}\right) - P_{kj}^{v}\left(\hat{\pi}_s^{2}\right)\right]^2\right\}, \tag{11}$$

где $\hat{\Pi}_{kj}^{v}$ – множество допустимых в ИС R_{kj}^{v} проверок; $P_{kj}^{v}\left(\hat{\pi}_s^{u}\right), u \in \{1; 2\}$, – вероятность u-го исхода проверки $\hat{\pi}_s$, выполненной в ИС R_{kj}^{v}. Эти вероятности определяются по формуле, аналогичной (5), т. е.

$$P_{kj}^{v}\left(\hat{\pi}_s^{u}\right) = P\left[\left(R_{kj}^{v}\right)_s^{u} \big/ R_{kj}^{v}\right] = \frac{\left|\left(\Delta_{kj}^{v}\right)_s^{u}\right|}{\left|\left(\nabla_{kj}^{v}\right)_s\right|} = \left(\left|\bigcap_{\left\{i:S_i \in \left(R_{kj}^{v}\right)_s^{u}\right\}} \ell_{is}\right|\right) \cdot \left(\left|\bigcup_{\left\{i:S_i \in R_{kj}^{v}\right\}} \ell_{is}\right|\right)^{-1}.$$

Если же ИС R_{kj}^{v} содержит в своем составе более двух ТС, то следует:

– определить для него множество $\hat{\Pi}_{kj}^{v}$ допустимых проверок;

– рассмотреть ИС R_{kj}^{v} как новое исходное ИС R_k, имеющее множество допустимых проверок $\hat{\Pi}_k$, и соответствующий ему коэффициент ψ_k;

– сформировать функцию Гамильтона $H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right)$ вида (10);

– вычислить ее значение для каждой из проверок $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_k$;

– выбрать значение вспомогательного коэффициента ψ_k из минимального значения вычисленных гамильтонианов согласно условию:

$$\psi_k = \min_{\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}_k}\left\{H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right)\right\}. \tag{12}$$

Оптимальная проверка для ИС R_k выбирается из условия минимума сформированного гамильтониана (10), т. е.

$$\hat{\pi}_j^{\text{опт}} = \arg\min_{\hat{\pi}_s \in \hat{\Pi}_k}\left\{H_{ks}\left(\Psi_{ks}, R_k\right)\right\}. \tag{13}$$

Алгоритм построения оптимальной гибкой диагностической процедуры

В рассматриваемом случае функционалом качества управления будет выражение (7). В результате синтеза ГДП необходимо обеспечить максимальное значение данного показателя.

Предлагаемый алгоритм, реализующий дискретный вариант принципа максимума, реализуется в виде последовательности нескольких шагов.

Шаг 1. Определение возможных исходов $R_{kj}^{v}\left(v = \overline{1, \omega_{kj}}\right)$ одной из проверок $\hat{\pi}_j \in \hat{\Pi}$ (начинать можно с любой из них), выполняемой в исходном ИС R_k=S, и вычисление вероятностей $P_k\left(\hat{\pi}_j^{v}\right)$ этих исходов.

Шаг 2. Формирование функции Гамильтона $H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right)$ и определение для каждого из ИС $R_{kj}^{v}\left(v = \overline{1, \omega_{kj}}\right)$ значений вспомогательных коэффициентов ψ_{kj}^{v}. Гамильтониан формируется согласно выражению (10). Вспомогательные коэффициенты определяются в зависимости от следующих условий:

2.1. Если $\operatorname{card}\left\{R_{kj}^{v}\right\} = 1$, т. е. $R_{kj}^{v} = \left\{S_i\right\}\left(i = \overline{1, m}\right)$, то ψ_{kj}^{v}=0.

2.2. Если $\operatorname{card}\left\{R_{kj}^{v}\right\} = 2$, т. е. $R_{kj}^{v} = \left\{S_i, S_f\right\}\left(i, f = \overline{1, m}; i \neq f\right)$, то значение коэффициента ψ_{kj}^{v} выбирается по условию (11).

2.3. Если $3 \leq \operatorname{card}\left\{R_{kj}^{v}\right\} \leq m - 1$, то для вычисления ψ_{kj}^{v} необходимо:

2.3.1. По условию (1) найти для ИС R_{kj}^{v} множество $\hat{\Pi}_{kj}^{v}$ допустимых проверок;

2.3.2. Рассмотреть ИС R_{kj}^{v} как новое ИС R_k, а соответствующее ему множество $\hat{\Pi}_{kj}^{v}$ – как новое множество $\hat{\Pi}_k$;

2.3.3. Сформировать и вычислить значения гамильтонианов (10) для каждой из проверок $\hat{\pi}_s \in \hat{\Pi}_k$;

1 2024 2.indd 68 21.03.2024 15:29:32

2.3.4. По условию (12) определить значение коэффициента ψ_{kj}^{v}.

Вычисление по формуле (10) значения гамильтониана $H_{kj}\left(\Psi_{kj}, R_k\right)$ при условии, что уже рассчитаны все коэффициенты $\psi_{kj}^{v}\left(v=\overline{1,\omega_{kj}}\right)$ для проверки $\hat{\pi}_j$, выполняемой в исходном ИС R_k=S.

Шаг 3. Вычисление значений гамильтонианов $H_{ks}\left(\Psi_{ks}, R_k\right)$ для всех оставшихся нерассмотренными проверок $\hat{\pi}_s \in \hat{\Pi} \setminus \left\{\hat{\pi}_j\right\}$ применительно к исходному ИС R_k=S. Для этого выполняются шаги 1 и 2.

Шаг 4. Выбор по условию (13) проверки $\hat{\pi}_j^{\text{опт}}$ для выполнения в ИС R_k=S.

Шаг 5. Определение оптимальных проверок для выполнения в каждом из ИС R_{kj}^{v}, удовлетворяющих условию $2 \le \text{card}\left\{R_{kj}^{v}\right\} < m$, являющихся исходами выбранной на шаге 4 проверки $\hat{\pi}_j^{\text{опт}}$. Для этого повторяются операции, предусмотренные шагами 1, 2, 3 и 4, причем анализируемые ИС R_{kj}^{v} рассматриваются как новые ИС $R_k \subset$S.

Поскольку на предыдущих шагах при расчете вспомогательных коэффициентов ψ_{kj}^{v} оптимальные проверки уже были определены, то можно построить искомую ГДП. Она будет оптимальной, поскольку обеспечивает максимальное среди всех возможных значение $V(G)$.

Пример построения гибкой диагностической процедуры

Для модели объекта диагностирования, представленной в виде таблицы 1, построим оптимальную ГДП, используя в качестве показателя оптимизации ценность ДИ, получаемой при выполнении проверок.

Шаг 1. Проверка $\hat{\pi}_1$, выполненная в исходном ИС $R_{1\text{-}5}$, имеет семь возможных исходов:

$$\hat{\pi}_1 : R_{1-5} \;\; \rightarrow \begin{cases} R_{1-5;1}^{1} = \left\{S_1\right\}, \text{если } y_1 \in \left(-1{,}5; -0{,}5\right) = \Delta_{1-5;1}^{1}; \\ R_{1-5;1}^{2} = \left\{S_1, S_2\right\}, \text{если } y_1 \in \left(-0{,}5; 0{,}0\right) = \Delta_{1-5;1}^{2}; \\ R_{1-5;1}^{3} = \left\{S_1, S_2, S_5\right\}, \text{если } y_1 \in \left(0{,}0; 0{,}5\right) = \Delta_{1-5;1}^{3}; \\ R_{1-5;1}^{4} = \left\{S_2, S_5\right\}, \text{если } y_1 \in \left(0{,}5; 1{,}0\right) = \Delta_{1-5;1}^{4}; \\ R_{1-5;1}^{5} = \left\{S_2, S_3\right\}, \text{если } y_1 \in \left(1{,}0; 1{,}5\right) = \Delta_{1-5;1}^{5}; \\ R_{1-5;1}^{6} = \left\{S_3, S_4\right\}, \text{если } y_1 \in \left(1{,}5; 2{,}5\right) = \Delta_{1-5;1}^{6}; \\ R_{1-5;1}^{7} = \left\{S_4\right\}, \text{если } y_1 \in \left(2{,}5; 3{,}5\right) = \Delta_{1-5;1}^{7}. \end{cases}$$

Определим вероятности каждого из исходов этой проверки по формуле (5):

$$\left|\nabla_{1-5;1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{5} \ell_{i1}\right| = 5{,}0\,; \;\; P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^{v}\right) = \frac{\left|\Delta_{1-5;1}^{v}\right|}{\left|\nabla_{1-5;1}\right|} = \begin{cases} 0{,}1\left(v = \overline{2,5}\right); \\ 0{,}2\left(v = 1; 6; 7\right). \end{cases}$$

Шаг 2. Сформируем соответствующий этой проверке гамильтониан (10):

$$H_{1-5;1}\left(\Psi_{1-5;1}; R_{1-5}\right) = \sum_{v=1}^{7} P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^{v}\right)\psi_{1-5;1}^{v} - \sum_{v=1}^{7} P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^{v}\right)\left[7 P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^{v}\right) - 1\right].$$

2.1. Поскольку $\text{card}\left\{R_{1-5;1}^{1}\right\} = \text{card}\left\{R_{1-5;1}^{7}\right\} = 1,$ то $\psi_{1-5;1}^{1} = \psi_{1-5;1}^{7} = 0.$

2.2. Рассмотрим ИС $R_{1-5;1}^{v}\left(v \in \left\{2; 4; 5; 6\right\}\right)$, у которых $\text{card}\left\{R_{1-5;1}^{v}\right\} = 2,$ и вычислим $\psi_{1-5;1}^{v}$. Сначала выберем для анализа ИС $R_{1-5;1}^{2} = \left\{S_1, S_2\right\}$, для которого $\hat{\Pi}_{1-5;1}^{2} = \left\{\hat{\pi}_3, \hat{\pi}_5\right\}$. Найдем возможные исходы каждой из этих проверок и определим их вероятности:

$$P_{1-5;1}^{2}\left(\hat{\pi}_3^{u}\right) = \frac{\left|\left(\Delta_{1-5;1}^{2}\right)_3^{u}\right|}{\left|\left(\nabla_{1-5;1}^{2}\right)_3\right|} = \begin{cases} 0{,}286\left(u = 1\right); \\ 0{,}714\left(u = 2\right); \end{cases}$$

$$P_{1-5;1}^{2}\left(\hat{\pi}_5^{u}\right) = \frac{\left|\left(\Delta_{1-5;1}^{2}\right)_5^{u}\right|}{\left|\left(\nabla_{1-5;1}^{2}\right)_5\right|} = \begin{cases} 0{,}444\left(u = 1\right); \\ 0{,}556\left(u = 2\right). \end{cases}$$

Рассчитаем, используя условие (11), значение коэффициента $\psi_{1-5;1}^{2}$:

$$\psi_{1-5;1}^{2} = \min_{\hat{\pi}_s \in \hat{\Pi}_{1-5;1}^{2}} \left\{-\left[P_{1-5;1}^{2}\left(\hat{\pi}_s^{1}\right) - P_{1-5;1}^{2}\left(\hat{\pi}_s^{2}\right)\right]^2\right\} =$$

$$= \min \begin{Bmatrix} -\left[0{,}286 - 0{,}714\right]^2 \\ -\left[0{,}444 - 0{,}556\right]^2 \end{Bmatrix} = -0{,}1837.$$

Аналогичным образом определим значения вспомогательных коэффициентов для ИС

$$R_{1-5;1}^{v}\left(v \in \left\{4; 5; 6\right\}\right): \;\psi_{1-5;1}^{4} = -0{,}0625\,;$$

$$\psi_{1-5;1}^{5} = -0{,}1111\,; \;\psi_{1-5;1}^{6} = -0{,}04\,.$$

Таблица 1

Таблица состояний объекта диагностирования

ТС S_i	Модельные интервалы ℓ_{ij} для диагностических признаков π_j				
	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
S_1	(-1,5; 0,5)	(-0,5; 0,2)	(-0,6; -0,2)	(0,0; 5,0)	(3,0; 4,0)
S_2	(-0,5; 1,5)	(0,0; 0,3)	(-0,2; 0,8)	(2,0; 6,0)	(2,0; 2,8)
S_3	(1,0; 2,5)	(-0,7; -0,3)	(0,4; 1,2)	(4,0; 6,0)	(3,2; 3,6)
S_4	(1,5; 3,5)	(-0,5; 0,0)	(0,0; 0,8)	(7,0;10,0)	(2,6; 3,0)
S_5	(0,0; 1,0)	(-0,1; 0,1)	(-0,8; -0,2)	(5,0; 7,0)	(2,6; 3,4)

1 2024 2.indd 69 21.03.2024 15:29:34

2.3. Чтобы вычислить значение вспомогательного коэффициента $\psi^3_{1-5;1}$ для ИС $R^3_{1-5;1}=\{S_1, S_2, S_5\}$, у которого $\mathrm{card}\{R^3_{1-5;1}\}=3$, необходимо рассмотреть его как новое состояние $R_{1,2,5}$. Проверки, допустимые для выполнения в этом ИС, образуют множество $\hat{\Pi}_{1,2,5}=\{\hat{\pi}_3, \hat{\pi}_4, \hat{\pi}_5\}$. Например, проверка $\hat{\pi}_3$ имеет следующие исходы с соответствующими вероятностями:

$$\hat{\pi}_3 : R_{1,2,5} \to \begin{cases} R^1_{1,2,5;3}=\{S_5\}, \text{ если } y_3 \in (-0{,}8; -0{,}6)=\Delta^1_{1,2,5;3}; \\ R^2_{1,2,5;3}=\{S_1, S_5\}, \text{ если } y_3 \in (-0{,}6; -0{,}2)=\Delta^2_{1,2,5;3}; \\ R^3_{1,2,5;3}=\{S_2\}, \text{ если } y_3 \in (-0{,}2; 0{,}8)=\Delta^3_{1,2,5;3}; \end{cases}$$

$$P_{1,2,5}(\hat{\pi}^1_3)=\frac{|\Delta^1_{1,2,5;3}|}{|\nabla_{1,2,5;3}|}=\frac{0{,}2}{1{,}6}=0{,}125; \; P_{1,2,5}(\hat{\pi}^2_3)=0{,}25;$$

$$P_{1,2,5}(\hat{\pi}^3_3)=0{,}625.$$

Составим гамильтониан (10) для этой проверки

$$H_{1,2,5;3}(\Psi_{1,2,5;3}; R_{1,2,5})=\sum_{v=1}^{3} P_{1,2,5}(\hat{\pi}^v_3)\psi^v_{1,2,5;3}-$$

$$-\sum_{v=1}^{3} P_{1,2,5}(\hat{\pi}^v_3)\left[3P_{1,2,5}(\hat{\pi}^v_3)-1\right].$$

Так как $\mathrm{card}\{R^1_{1,2,5;3}\}=\mathrm{card}\{R^3_{1,2,5;3}\}=1$, следовательно, $\psi^1_{1,2,5;3}=\psi^3_{1,2,5;3}=0$.

Для вычисления значения коэффициента $\psi^2_{1,2,5;3}$ в соответствии с (11), определим вероятности исходов проверок, допустимых в ИС $R^2_{1,2,5;3}=\{S_1, S_5\}$.

По условию (1) $\hat{\Pi}^2_{1,2,5;3}=\{\hat{\pi}_4\}$. При этом

$$P^2_{1,2,5;3}(\hat{\pi}^u_4)=\frac{\left|(\Delta^2_{1,2,5;3})^u_4\right|}{\left|(\nabla^2_{1,2,5;3})_4\right|}=\begin{cases} 0{,}714\ (u=1); \\ 0{,}286\ (u=2). \end{cases}$$

Подставив вычисленные значения вероятностей $P^2_{1,2,5;3}(\hat{\pi}^u_4)$ в формулу (11), определим, что

$$\psi^2_{1,2,5;3}=-\left[P^2_{1,2,5;3}(\hat{\pi}^1_4)-P^2_{1,2,5;3}(\hat{\pi}^2_4)\right]^2=-0{,}1837.$$

Теперь рассчитаем значение гамильтониана:

$$H_{1,2,5;3}(\Psi_{1,2,5;3}; R_{1,2,5})=-0{,}4522.$$

А значения гамильтонианов $H_{1,2,5;4}(\Psi_{1,2,5;4}; R_{1,2,5})$ и $H_{1,2,5;5}(\Psi_{1,2,5;5}; R_{1,2,5})$ для проверок $\hat{\pi}_4$ и $\hat{\pi}_5$, выполняемых в ИС $R_{1,2,5}$, определим аналогично:

$$H_{1,2,5;4}(\Psi_{1,2,5;4}; R_{1,2,5})=-0{,}3121; \; H_{1,2,5;5}(\Psi_{1,2,5;5}; R_{1,2,5})=-0{,}243.$$

Сравнив вычисленные значения гамильтонианов, определим, что проверка $\hat{\pi}_3$ согласно (13) является оптимальной для выполнения в ИС $R_{1,2,5}$, следовательно, в соответствии с (12) коэффициент $\psi^3_{1-5;1}=-0{,}4522$.

Поскольку значения всех коэффициентов $\psi^v_{1-5;1}\,(v=\overline{1,7})$ уже определены, рассчитаем значение гамильтониана $H_{1-5;1}(\Psi_{1-5;1}; R_{1-5})$ при условии, что в начальном ИС R_{1-5} выполняется проверка $\hat{\pi}_1$:

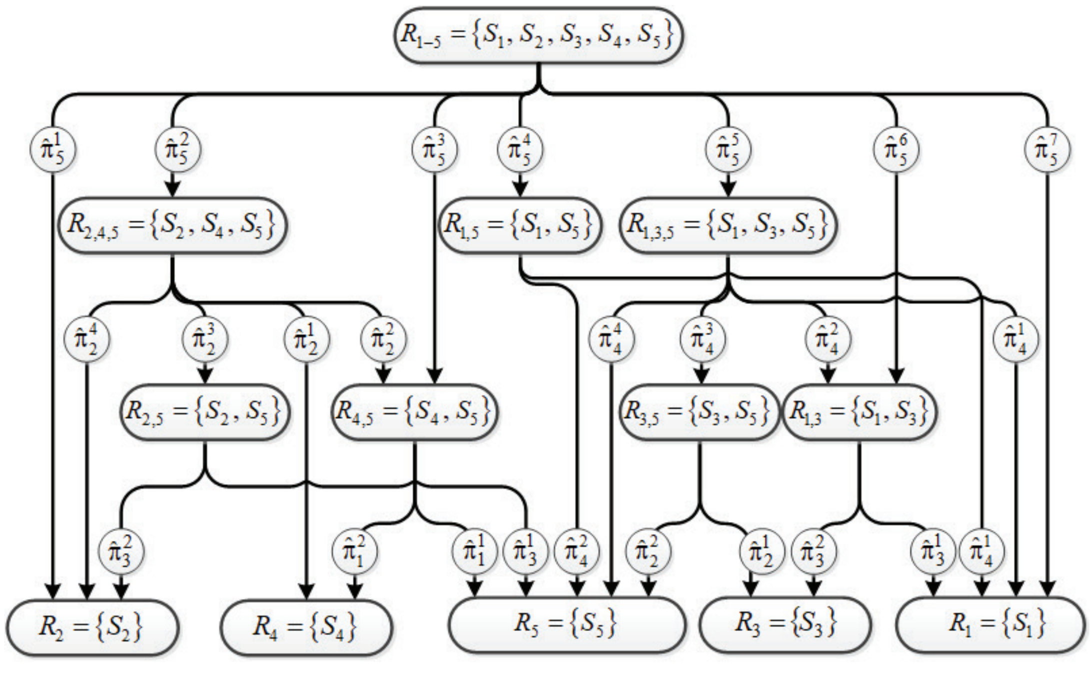

Рис. 1. Оптимальная гибкая диагностическая процедура

1 2024 2.indd 70 21.03.2024 15:29:40

$$H_{1-5;1}\left(\Psi_{1-5;1};R_{1-5}\right)=\sum_{v=1}^{7}P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^v\right)\psi_{1-5;1}^v-$$
$$-\sum_{v=1}^{7}P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^v\right)\left[7P_{1-5}\left(\hat{\pi}_1^v\right)-1\right]=-0,2089.$$

Шаг 3. Значения гамильтонианов $H_{1-5;j}\left(\Psi_{1-5;j};R_{1-5}\right)$ для остальных проверок $\hat{\pi}_j\left(j=\overline{2,5}\right)$ вычислим аналогичным образом, повторив выполнение шагов 1 и 2:

$$H_{1-5;2}\left(\Psi_{1-5;2};R_{1-5}\right)=-0,3248;\ H_{1-5;3}\left(\Psi_{1-5;3};R_{1-5}\right)=-0,1759;$$
$$H_{1-5;4}\left(\Psi_{1-5;4};R_{1-5}\right)=-0,2909;\ H_{1-5;5}\left(\Psi_{1-5;5};R_{1-5}\right)=-0,3985.$$

Шаг 4. Оптимальной проверкой для начального ИС $R_{1\text{-}5}$ в соответствии с условием (13) является $\hat{\pi}_5$.

Шаг 5. Так как в процессе вычисления гамильтониана $H_{1-5;5}\left(\Psi_{1-5;5};R_{1-5}\right)$ уже были рассмотрены все возможные пути достижения из начального ИС $R_{1\text{-}5}$, начиная с проверки $\hat{\pi}_5$, всех конечных ИС $R_i=\{S_i\}\left(i=\overline{1,5}\right)$, завершим построение оптимальной ГДП и представим ее на рис. 1 в виде ориентированного графа.

Упорядоченные подмножества проверок $\hat{\Pi}_r\left(r=\overline{1,20}\right)$, необходимых для определения ТС объекта, представим в виде табл. 2.

Чтобы рассчитать среднее значение $V(G)$ ценности ДИ, получаемой при реализации программы, изображенной на рис. 1, воспользуемся формулами (7) и (8). В результате получим, что $V(G)$=0,3985.

Заключение

Использование в качестве показателя оптимизации ценности ДИ, получаемой при выполнении проверок ДП, позволяет применять для определения любого из заданных ТС объекта только наиболее «ценные» проверки. Гибкость предложенного алгоритма позволяет сократить избыточность информации.

С целью подтверждения того, что алгоритм действительно является оптимальным, для тех же исходных данных, представленных в табл. 1, методом динамического программирования была синтезирована ГДП, оптимальная по тому же критерию. Поскольку результаты получились аналогичными представленным на рис. 1 и в табл. 2, можно утверждать, что алгоритм оптимален.

Предложенный алгоритм может быть использован не только для определения вида ТС объекта при его контроле, но и для диагностирования объекта с заданной глубиной, а также для контроля правильности его функционирования. Кроме того, такой алгоритм может найти свое применение в автоматизированных системах обработки и анализа измерительной информации, разрабатываемых для мониторинга состояния сложных технических объектов.

В качестве направления дальнейших исследований можно предложить разработку аналогичного оптимального алгоритма при использовании модели объекта анализа, в которой модельные значения ДП представлены в бинарной или многозначной форме.

Литература

1. Теоретические основы и методы оптимизации анализа технического состояния сложных систем : монография / В.В. Мышко, А.Н. Кравцов, Е.В. Копкин, В.А. Чикуров. – Санкт-Петербург : ВКА имени А.Ф. Можайского, 2013. – 303 с.

2. Болтянский, В. Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. – Москва : Наука, 1973. – 448 с.

3. Габасов, Р. Ф. Принцип максимума в теории оптимального управления : монография / Р.Ф. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. – 272 с.

4. Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – Москва : Наука, 1978. – 488 с.

Таблица 2

Упорядоченные наборы проверок, выполняемых при определении каждого из заданных ТС объекта

S_i	$\hat{\Pi}_r$
S_2	$\hat{\Pi}_1=\{\hat{\pi}_5\}$; $\hat{\Pi}_2=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2\}$; $\hat{\Pi}_3=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2,\hat{\pi}_3\}$
S_4	$\hat{\Pi}_4=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2\}$; $\hat{\Pi}_5=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2,\hat{\pi}_1\}$; $\hat{\Pi}_6=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_1\}$
S_5	$\hat{\Pi}_7=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2,\hat{\pi}_1\}$; $\hat{\Pi}_8=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_1\}$; $\hat{\Pi}_9=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_3\}$; $\hat{\Pi}_{10}=\hat{\Pi}_{11}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_4\}$; $\hat{\Pi}_{12}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_4,\hat{\pi}_2\}$
S_3	$\hat{\Pi}_{13}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_4,\hat{\pi}_2\}$; $\hat{\Pi}_{14}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_2,\hat{\pi}_3\}$; $\hat{\Pi}_{15}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_3\}$
S_1	$\hat{\Pi}_{16}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_4,\hat{\pi}_3\}$; $\hat{\Pi}_{17}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_3\}$; $\hat{\Pi}_{18}=\hat{\Pi}_{19}=\{\hat{\pi}_5,\hat{\pi}_4\}$; $\hat{\Pi}_{20}=\{\hat{\pi}_5\}$

5. Сейдж, Э. П. Оптимальное управление системами / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – Москва : Радио и связь, 1982. – 392 с.

6. Пантелеев, А. В. Оптимальное управление в примерах и задачах : учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский, Т.А. Летова. – Москва : МАИ, 1996. – 211 с.

7. Марданов, М. Д. Новый дискретный аналог принципа максимума Понтрягина / М.Д. Марданов, Т.К. Меликов // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 483, № 1. – С. 15–18.

8. Юдин, Ю. И. Идентификация математической модели прямолинейного движения судна с использованием принципа максимума Понтрягина / Ю.И. Юдин // Морские интеллектуальные технологии. – 2019. – № 4-3 (46). – С. 18–23.

9. Троеглазов, А. П. Автономная стабилизация судна на курсе при работе авторулевого в конфигурации интегрированной мостиковой системы по принципу максимума / А.П. Троеглазов // Транспортное дело России. – 2020. – № 2. – С. 157–161.

10. Климов, С. С. Особенности алгоритмов расчёта оптимальных траекторий ракет-носителей с использованием принципа максимума Понтрягина / С.С. Климов // Космонавтика и ракетостроение. – 2018. – № 3 (102). – С. 22–36.

11. Храмов, А. А. Оптимизация комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата методом принципа максимума Понтрягина / А.А. Храмов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2019. – Т. 18, № 1. – С. 140–153.

12. Ковалев, А. С. Синтез автомата стабилизации угла крена на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина / А.С. Ковалев, А.А. Злобарь, А.Б. Николаев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2021. – № 9. – С. 332–337.

13. Дмитриев, А. К. Использование принципа максимума Понтрягина для синтеза оптимальных поисковых стратегий / А.К. Дмитриев, Е.В. Копкин // Авиакосмическое приборостроение. – 2005. – № 10. – С. 14–19.

14. Стратонович, Р. Л. Теория информации / Р.Л. Стратонович. – Москва : Советское радио, 1975. – 424 с.

15. Копкин, Е. В. Оптимальный алгоритм анализа технического состояния объекта на основе меры ценности диагностической информации / Е.В. Копкин, И.М. Кобзарев // Труды Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. – 2018. – Вып. 661. – С. 15–31.

16. Копкин, Е. В. Использование меры ценности информации Стратоновича для оптимизации гибких программ диагностирования технических объектов / Е.В. Копкин, И.М. Кобзарев // Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18, № 6. – С. 1434–1461.