

УДК 621.394.343

## Анализ сложности решения обратных оптимизационных задач при обосновании сетевых механизмов обеспечения качества обслуживания мультимедийного трафика

**Analysis of the complexity of solving inverse optimization problems when justifying network mechanisms to ensure the quality of multimedia traffic service**

**Одоевский / Odoevsky S.**

Сергей Михайлович

(odse2017@mail.ru)

доктор технических наук, профессор.

ФГКБОУ ВО «Военная академия связи имени

Маршала Советского Союза С. М. Буденного» МО РФ

(ВАС им С. М. Буденного),

профессор кафедры сетей связи и систем

коммутации.

г. Санкт-Петербург

**Ясинский / Yasinskii S.**

Сергей Александрович

(yasinsky777@mail.ru)

доктор технических наук, доцент.

ЗАО "Институт телекоммуникаций",

ведущий специалист.

г. Санкт-Петербург

**Рафальская / Rafalskaya M.**

Маргарита Игоревна

(margo-23@bk.ru)

ВАС им. С. М. Буденного, адъюнкт кафедры сетей

связи и систем коммутации.

г. Санкт-Петербург

**Ключевые слова:** мультимедийный трафик – multimedia traffic; сетевые механизмы – network mechanisms; обратные задачи – inverse problems; унимодальная оптимизация – unimodal optimization.

При обосновании сетевых механизмов обеспечения качества обслуживания мультимедийного трафика для решения обратных оптимизационных задач предлагается использовать методы, опирающиеся на алгоритмы поиска минимума унимодальной функции. Приводятся результаты сравнительного анализа таких алгоритмов по критерию минимального количества необходимых расчетов целевой функции при различной допустимой погрешности.

When justifying network mechanisms for ensuring the quality of multimedia traffic service, it is proposed to use methods based on algorithms for finding the minimum of the unimodal function to solve inverse optimization problems. The results of a comparative analysis of such algorithms according to the criterion of the minimum number of necessary calculations of the objective function with different permissible error are presented.

### Введение

Качество обслуживания мультимедийного трафика (ММТ) в устройствах коммутации мультисервисной

сети связи сложно оценивать по конечным показателям качества звука, изображения и данных, поэтому для этой цели обычно используются традиционные для систем массового обслуживания (СМО) показатели задержек, потерь и искажений пакетов или их свертка в виде некоторого обобщенного показателя. При этом возникает вопрос, насколько эффективной является обработка ММТ при использовании в устройствах коммутации тех или иных сетевых механизмов (СМ), и какая обработка будет наиболее эффективной.

При заданной интенсивности пакетов и пропускной способности (ПС) используемых маршрутов можно считать, что чем меньше задержки, потери и искажения пакетов, тем лучше и, соответственно, тем эффективнее используемые СМ, что может отражать некоторый обобщенный показатель, пропорциональный указанным частным показателям. Достоинством такой оценки эффективности является естественный характер причинно-следственных связей, удобный как для расчетов по прямым формулам, вытекающим из соответствующих моделей СМО, так и для контрольных измерений в реальной сети [1]. Удобным в вычислительном смысле применительно к данному случаю является решение оптимизационных задач поиска наилучших СМ и их

управляемых параметров по критерию минимума выбранного показателя [2].

При заданных требованиях к показателям задержек, потере и искажений пакетов, что обычно и бывает на практике, СМ нацеливаются на выполнение этих требований в изменяющихся условиях функционирования. При этом в качестве показателя эффективности используемых СМ целесообразно использовать некоторую контролируемую меру условий функционирования, характеризующую их максимальное допустимое мешающее или минимальное необходимое помогающее воздействие.

С точки зрения эффективности обработки отдельных потоков ММТ в качестве меры мешающего воздействия условий функционирования можно рассматривать суммарную интенсивность общего ММТ, а в качестве меры помогающего воздействия – суммарную ПС доступных маршрутов [1]. При выполнении заданных требований к качеству обслуживания ММТ следует считать, чем выше максимальная допустимая суммарная интенсивность ММТ (при заданной ПС доступных маршрутов) или чем ниже минимальная необходимая ПС доступных маршрутов (при заданной интенсивности ММТ), тем эффективнее используемые СМ. Достоинством такой оценки эффективности является возможность её использования в качестве контролируемой меры допустимых изменений условий функционирования, на которые могут влиять соответствующие СМ ограничения нагрузки и резервирования канальных ресурсов.

Однако, для расчета указанных показателей эффективности необходимо решать непростые в вычислительном смысле обратные оптимизационные задачи по отношению к причинно-следственным связям и прямым формулам, вытекающим из соответствующих моделей СМО. Особенностью таких задач является наличие фактически двух вложенных оптимизационных задач: поиска наилучших управляемых параметров СМ и поиска решения уравнения, связывающего искомые (обратные) показатели условий функционирования с требованиями к качеству обслуживания ММТ.

В статье [1] для решения обратных оптимизационных задач рассматривался вариант, когда внешней задачей является обратная задача поиска решения уравнения относительно искомого обратного показателя, а внутренней – задача оптимизации управляемых параметров СМ по прямому обобщенному показателю качества обслуживания. Другим способом решения таких задач является вариант, когда внешней задачей является задача оптимизации управляемых параметров СМ по обратному показателю, а внутренней – обратная задача поиска решения уравнения относительно данного показателя при очередных пробных значениях управляемых параметров СМ.

При использовании обоих вариантов решения обратных оптимизационных задач возникает проблема выбора численных методов [3], при которых потребу-

ется наименьшее количество итераций и промежуточных расчетов для получения результата с заданной точностью. В общем случае вложенность двух оптимизационных задач с не гарантируемой выпуклостью и возможным наличием изломов целевых функций (ЦФ) не позволяет рассчитывать на аналитический расчет производных, что затрудняет использование градиентных методов оптимизации. В то же время анализ решения примеров практических задач оптимизации СМ обеспечения качества обслуживания ММТ показывает, что в области определения ЦФ они имеют один экстремум, а уравнения при решении обратных задач имеют единственное решение. Это позволяет рассчитывать на возможность применения методов (алгоритмов) унимодальной оптимизации для эффективного решения подобного класса задач [3,...,5], но после проведения сравнительного анализа таких алгоритмов по критерию минимального количества необходимых расчетов ЦФ при различной допустимой погрешности.

### Алгоритмы поиска минимума унимодальной функции с постоянным и переменным шагом

Так как функция  $f(x)$  унимодальная, т.е. существует только один минимум на отрезке  $x \in [a, b]$ , то при любом множестве промежуточных значений аргумента  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  (будем считать их упорядоченными по возрастанию  $x_i < x_{i+1}$ ), обязательно найдется только одна точка  $x_m$ , в которой значение функции  $f(x_m)$  будет меньше значений функции  $f(x_i)$  в любых других точках  $x_i, i \neq m$ . Точное решение  $x^0$  будет находиться на отрезке  $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ , если  $m > 1$ , или  $[a, x_2]$ , если  $m = 1$ , или  $[x_{m-1}, b]$ , если  $m = N$ . Если принять эту точку  $x_m$  за окончательное решение  $x^* = x_m$ , то максимальная погрешность такого результата будет равна или  $\Delta = \max(x_m - x_{m-1}, x_{m+1} - x_m)$ , или  $\Delta = \max(x_1 - a, x_2 - x_1)$ , или  $\Delta = \max(x_N - x_{N-1}, b - x_N)$ , соответственно. Более точным решением будет выбор середины указанного отрезка  $x^* = (x_{m-1} + x_{m+1}) / 2$ , или  $x^* = (x_2 + a) / 2$ , или  $x^* = (b + x_{N-1}) / 2$ , а погрешность, соответственно, будет равна половине этого отрезка  $\Delta = (x_{m-1} - x_{m+1}) / 2$ , или  $\Delta = (x_2 - a) / 2$ , или  $\Delta = (b - x_{N-1}) / 2$ .

Самым простым алгоритмом вычисления минимума унимодальной функции с заданной точностью (допустимой погрешностью)  $\varepsilon$  является алгоритм полного перебора [3] промежуточных значений  $x_{i+1} = x_i + \varepsilon$ , перебираемых с постоянным шагом  $\varepsilon$ , начиная с минимального значения  $x_1 = a + \varepsilon$ , до значения  $x_N$ , при котором будет выполнено условие  $f(x_N) > f(x_{N-1})$ , т.е. начиная с этой точки  $x_N$  функция начинает возрастать или окажется  $x_N + \varepsilon \geq b$ , т.е. закончится диапазон поиска. Поскольку точное решение  $x^0$  может оказаться в любом месте диапазона значений  $x \in [a, b]$ , то требуемое количество вычислений  $N$  с заданной точностью  $\varepsilon < (b - a) / 2$  может оказаться любым (рис. 1) в интервале от 2 (увеличение функции обнаружится на втором шаге) до  $\lceil (b - a) / \varepsilon \rceil - 1$  (увеличение функции

не будет обнаружено, т.е. окажется в самом конце диапазона).

В худшем случае (при отсутствии статистических данных о возможном местоположении точки минимума) для любой унимодальной функции можно гарантировать, что количество расчетов целевой функции при использовании алгоритма полного перебора не превысит величину

$$N = \lceil (b - a) / \varepsilon \rceil - 1. \quad (1)$$

Вычитание 1 в формуле (1) от округлённого вверх результата деления  $(b - a) / \varepsilon$  указывает на исключение лишнего расчета в точке  $b_\varepsilon = a + \lceil (b - a) / \varepsilon \rceil \cdot \varepsilon$ , совпадающей с правой границей  $b$  или немного превышающей её (см. рис. 1а) на величину меньше  $\varepsilon$  при переборе заданного диапазона  $[a, b]$  с шагом  $\varepsilon$ . При большой допустимой погрешности  $\varepsilon \geq (b - a) / 2$  перебор диапазона  $[a, b]$  с шагом  $\varepsilon$  теряет смысл, и достаточно выполнить один расчет  $N=1$  в его середине.

При, как правило, очень малой допустимой погрешности  $\varepsilon = (b - a)$  более эффективными (требующими меньшее количество промежуточных вычислений  $N$ ) являются алгоритмы перебора промежуточных значений искомой величины  $x \in [a, b]$  с переменным шагом. Например, используя описанный выше алгоритм полного перебора сначала с большим шагом, найти отрезок длиной, равной этому удвоенному шагу, на котором находится оптимальное решение. А затем на найденном отрезке повторить перебор с более мелким шагом, найти более короткий отрезок с этим шагом и т.д., повторяя циклы вычислений с разным (уменьшающимся) шагом до достижения необходимой точности [3]. Суммарное количество расчетов  $N$  будет равно сумме расчетов на каждом цикле. Следует ожидать, что это количество будет меньше (рис. 2), чем в случае полного перебора с постоянным самым маленьким шагом  $\varepsilon$  (рис. 1в). Но в общем случае эффект от использования расчетов с переменным шагом будет зависеть от того, как именно будут изменяться шаги на каждом цикле.

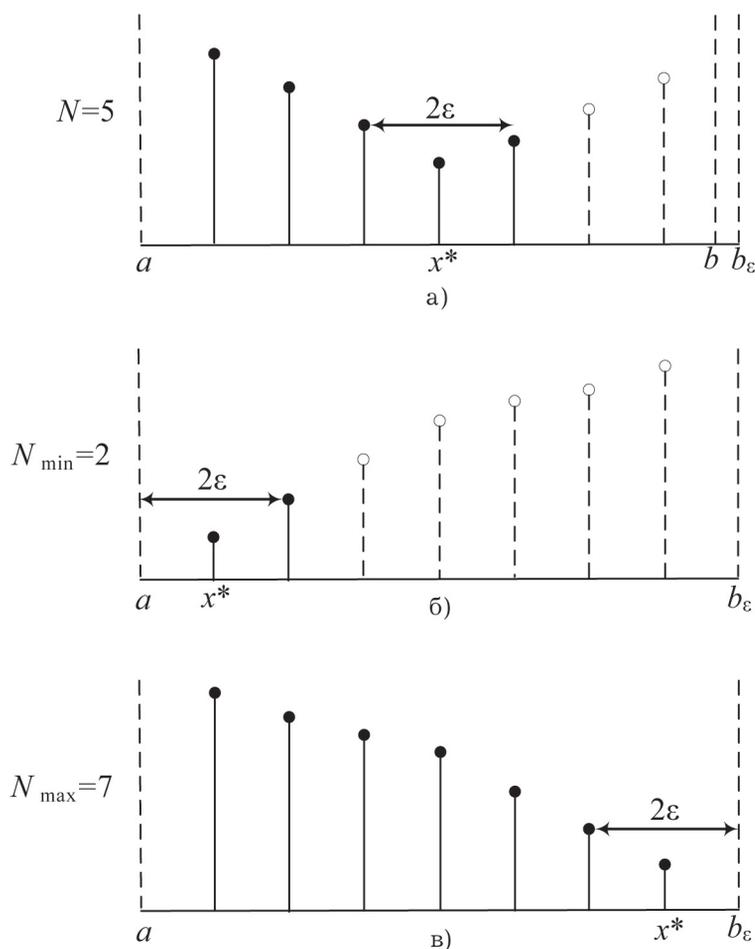


Рис. 1. Примеры вычисления минимума функции методом полного перебора

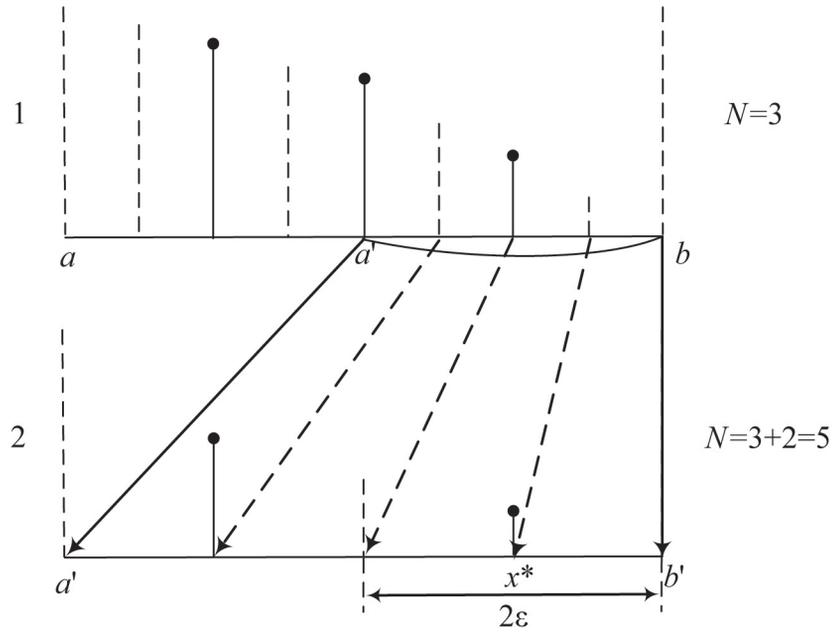


Рис. 2. Пример вычисления минимума методом полного перебора с разным шагом на двух вложенных циклах

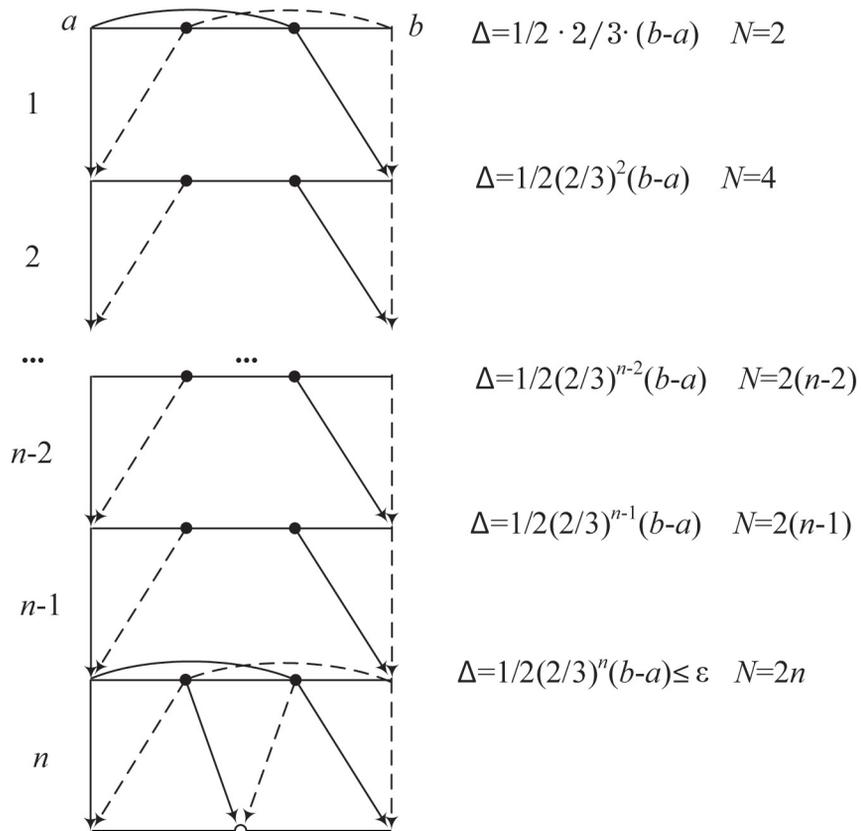


Рис. 3. Иллюстрация метода вычислений с вложенными циклами по два расчета в промежуточных равноотстоящих точках на каждом цикле

**Алгоритмы оптимизированного поиска минимума унимодальной функции с переменным шагом**

Оптимальным алгоритмом итерационного поиска (вычисления) минимума унимодальной функции  $f(x)$  одной переменной  $x$  на заданном отрезке  $x \in [a, b]$  будем считать алгоритм, требующий минимального количества промежуточных расчетов значений функции  $f(x_i)$  в различных точках  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset [a, b]$ , для принятия решения о значении переменной  $x^*$ , при котором достигается минимум функции  $f(x^*)$  с погрешностью, т.е. отличием от истинного точного значения  $x^0, f(x^0) < f(x^*) < f(x), \forall x \notin [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ , не выше заданной величины  $\varepsilon \geq |x^* - x^0|$ .

Чтобы сузить диапазон поиска и перейти от большего шага к меньшему, требуются, как минимум, две промежуточные точки  $x_1$  и  $x_2$  (при переборе с большим шагом), разделяющие исходный отрезок на три части. Сравнивая значения функции  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$  в этих точках, можно отбросить один из крайних участков, который граничит с той точкой из этих двух, в которой значение функции больше. Если на каждом цикле делить очередной отрезок на три равные части с двумя разделяющими их точками расчетов  $x_1$  и  $x_2$ , то отрезок с искомым значением будет уменьшаться на каждом очередном цикле на 1/3 или, иначе, составлять долю 2/3 от длины отрезка на предыдущем цикле (рис. 3). В итоге за  $n$  циклов будет достигнута точность  $\Delta = 0.5(b - a) \cdot (2/3)^n$ .

Учитывая, что на каждом цикле, кроме последнего, потребуется выполнять по 2 расчета, то суммарное количество расчетов с заданной точностью  $\varepsilon$  при условии  $\Delta \leq \varepsilon$  будет равно

$$N = 2 \lceil \ln[2\varepsilon / (b - a)] / \ln(2/3) \rceil. \tag{2}$$

На завершающем цикле, который включает два одинаковых участка размером не более заданной погрешности  $\varepsilon$ , в точке между которыми и находится найденное минимальное значение функции, расчет в этой точке выполнять не нужно, так как он совпадает с одним из двух расчетов на предыдущем цикле. Лишь при большой допустимой погрешности  $\varepsilon \geq (b - a) / 2$  потребуется выполнить не два, а один расчет в центре исходного отрезка.

Более сильно, примерно в 2 раза, уменьшить диапазон поиска на каждом цикле можно путем деления очередного отрезка на три неравные части с двумя промежуточными точками  $x_1, x_2$ , расположенными максимально близко к середине очередного отрезка симметрично от неё на расстоянии, равном половине заданной точности  $\varepsilon$ , на всех вложенных циклах (рис. 4). Такой способ поиска минимума унимодальной функции принято называть методом дихотомии [4].

Из-за постоянной величины внутреннего участка между точками  $x_1$  и  $x_2$  на всех циклах по мере сокращения отрезка относительная доля этого участка возрастает и на предпоследнем цикле становится равной одной трети, как в рассмотренном выше случае (рис. 3). Соответственно, на завершающем цикле, как

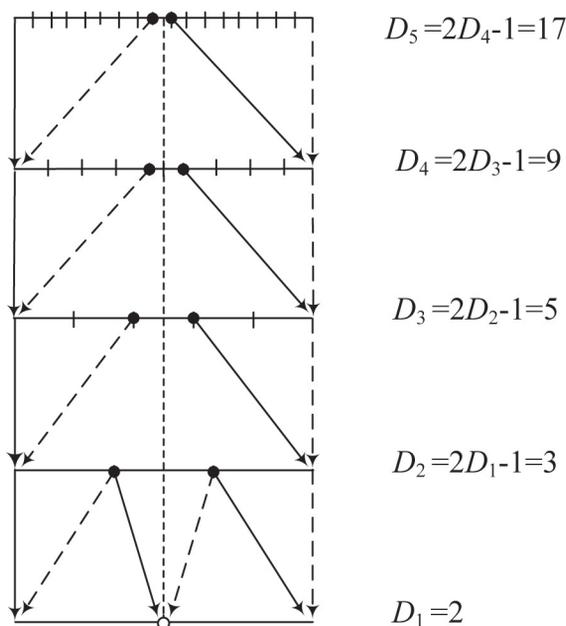


Рис. 4. Иллюстрация вычислений методом дихотомии с вложенными циклами по два расчета в точках, близких к середине, на каждом цикле

и в предыдущем случае, расчет в центре последнего отрезка выполнять не нужно, так как он совпадает с одним из двух расчетов на предыдущем цикле. И так же лишь при большой допустимой погрешности  $\varepsilon \geq (b-a)/2$  потребуется выполнить не два, а один расчет в центре исходного отрезка.

Как видно из рис. 4, на каждом цикле  $n=1,2,\dots$  (если нумеровать от конца) количество участков (условных шагов)  $D_n$  величиной  $\varepsilon$  можно определить с помощью рекуррентного соотношения  $D_1 = 2, D_n = 2 \cdot D_{n-1} - 1, n \geq 2$ . Методом математической индукции несложно получить прямую формулу расчета количества участков  $D_n$  на любом цикле  $n$ :

$$D_n = 2^{n-1} + 1. \quad (3)$$

Начиная расчеты с разбиения области поиска на  $D_n \geq (b-a)/\varepsilon$  участков, потребуется  $n-1$  цикл расчетов в двух точках на каждом цикле. Всего потребуется количество расчетов:

$$N = 2(n-1), \quad n = \arg \min D_n \geq (b-a)/\varepsilon. \quad (4)$$

Подставляя правую часть неравенства (4) в левую часть уравнения (3), можно найти аналитически требуемое количество циклов  $n$ :

$$(b-a)/\varepsilon \leq D_n = 2^{n-1} + 1, \quad n = \lceil \log_2(\lceil (b-a)/\varepsilon \rceil - 1) \rceil + 1. \quad (5)$$

Уменьшить диапазон поиска на каждом цикле ровно в два раза можно также путем деления отрезка на 4 равные части с тремя промежуточными точками  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , но расчеты потребуются выполнять только в двух крайних точках  $x_1$  и  $x_3$ , а результат расчета в средней точке  $x_2$  сохранять из предыдущего цикла, выполняемого с шагом в 2 раза большим (рис. 5). Исключение будет составлять только самый первый цикл, на котором придется выполнить расчет во всех трех точках. В итоге за  $n$  циклов будет достигнута точность  $\Delta = 0.5(b-a) \cdot (1/2)^n$ . Учитывая, что на каждом цикле требуется выполнять по 2 дополнительных расчета, а на первом шаге на один расчет больше, суммарное количество расчетов с заданной точностью  $\varepsilon$  при условии  $\Delta \leq \varepsilon$  будет равно

$$N = 1 + 2 \lceil \ln[2\varepsilon / (b-a)] / \ln(1/2) \rceil = 2 \lceil \log_2((b-a)/\varepsilon) \rceil - 1. \quad (6)$$

Фактически описанный выше алгоритм представляет собой другой вариант реализации метода дихотомии.

Недостатком описанных выше трех алгоритмов расчета минимума унимодальной функции явля-

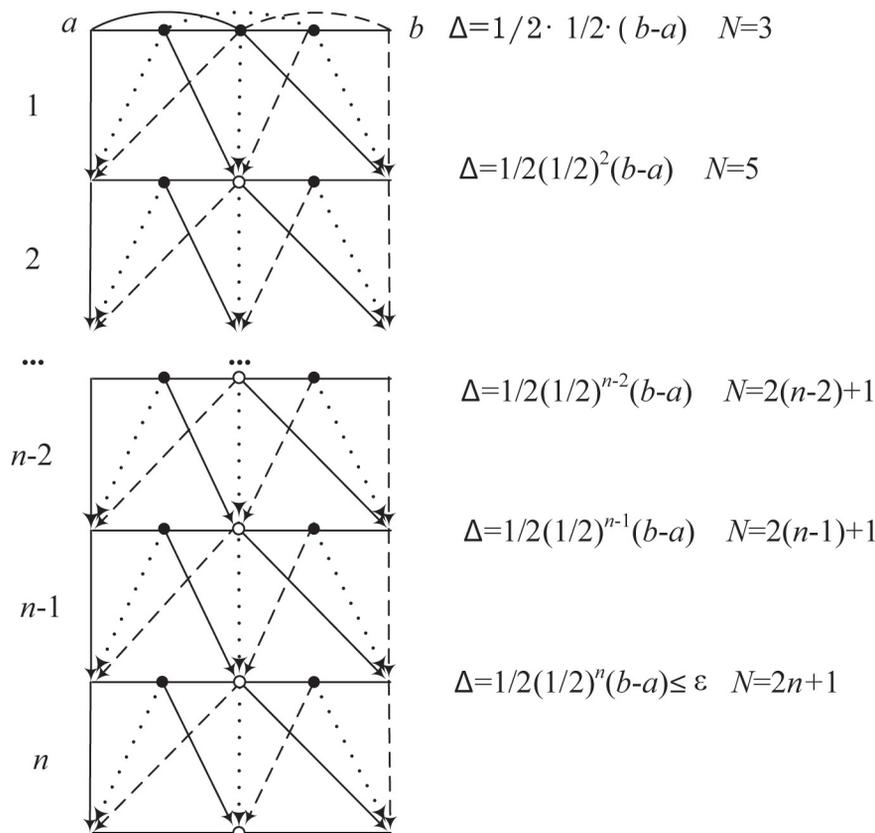


Рис. 5. Иллюстрация метода вычислений с вложенными циклами по два расчета в двух из трех равноотстоящих точках на каждом цикле

ется необходимость выполнения по два расчета на каждом цикле (кроме последнего). От этого недостатка можно избавиться, если на каждом цикле делить отрезок на три неравные части, но такие, чтобы внутренняя точка на отрезке, остающемся на каждом цикле после отбрасывания одного из двух крайних участков, оказывалась в нужном месте с точки зрения деления этого отрезка на три неравные части на следующем цикле [5]. Учитывая, что на следующий цикл может перейти любая из двух точек, они должны быть расположены симметрично на текущем отрезке. Таким свойством симметрии с сохранением нужных пропорций, сходящихся на последнем шаге к делению оставшегося отрезка на две одинаковые части, равные заданной погрешности  $\varepsilon$ , соответствует последовательность чисел Фибоначчи [6]: 1,1,2,3,5,8,13,..., которые описываются линейным рекуррентным соотношением:  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ .

Приведенное рекуррентное соотношение позволяет на некотором начальном цикле текущий отрезок, размеченный точками с равномерным шагом  $\varepsilon = (b - a) / F_n$ , разделить сначала на две части в пропорции  $(F_{n-2}) / (F_{n-1})$ , а затем вторую (большую) часть размером  $F_{n-1}$  шагов поделить еще на две части в пропорции  $(F_{n-3}) / (F_{n-2})$ . В этом случае отрезок получается разделен на три части, крайние из которых являются одинаковыми и равными  $F_{n-2}$  шагов, а средняя часть равна  $F_{n-3}$  шагов. При отбрасывании любого из двух крайних участков на следующий цикл перейдет отрезок длиной  $F_{n-1}$  шагов вместе с промежуточной точкой, которая поделит новый отрезок

в нужной пропорции  $(F_{n-3}) / (F_{n-2})$  на две части, а после деления большей части размером  $F_{n-2}$  шагов в пропорции  $(F_{n-4}) / (F_{n-3})$ , опять получится одинаковый размер крайних участков длиной  $F_{n-3}$  шагов, а средняя часть будет равна  $F_{n-4}$  шагов. Расчет заканчивается, когда очередной отрезок длиной  $F_4$  шагов будет поделен сначала в пропорции  $(F_3) / (F_2)$  на две неравные части, потом больший отрезок поделится в пропорции  $(F_2) / (F_1)$  на две равные части, и в итоге весь отрезок поделится на три равные части  $F_1 / F_1 / F_1$ . Формально нужен еще один последний цикл, на котором в центре в качестве итогового результата расчета останется одна из двух крайних точек предпоследнего цикла, но расчет функции в ней выполнять уже не нужно, так как он будет выполнен на предыдущем цикле.

В итоге, начиная расчеты с разбиения области поиска на  $F_n \geq (b - a) / \varepsilon$  шагов, потребуется один (начальный) цикл с расчетов функции в двух точках и  $n - 4$  цикла расчетов в одной дополнительной точке (рис. 6). Итого потребуется количество расчетов:

$$N = n - 2, \quad n = \arg \min F_n \geq (b - a) / \varepsilon. \quad (7)$$

Для определения начального номера числа Фибоначчи  $n$  можно воспользоваться формулой Бине [7]:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\varphi - (-\varphi)^{-1}} = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{2\varphi - 1} = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}},$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618. \quad (8)$$

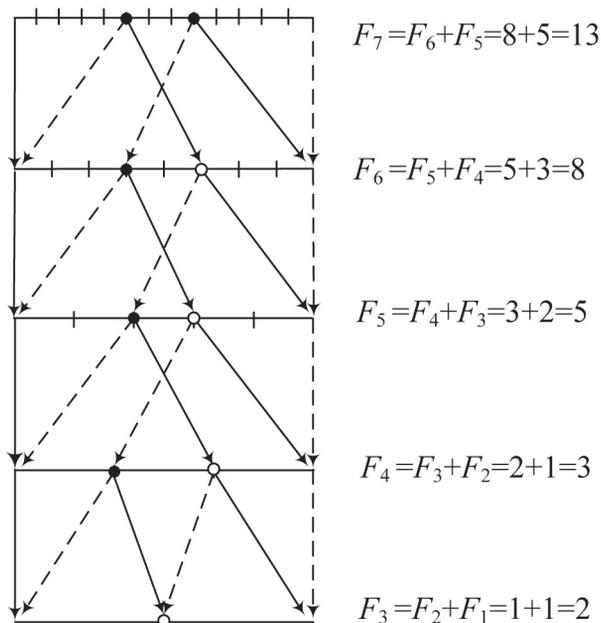


Рис. 6. Иллюстрация метода вычислений с вложенными циклами по одному расчету в одной из двух точек, расположенных в соответствии с числами Фибоначчи на каждом цикле

Из приближенного равенства можно найти аналитически требуемый номер  $n$ :

$$(b-a)/\varepsilon \leq F_n \approx \varphi^n / \sqrt{5}, \quad n \approx \left\lceil \frac{\ln(\sqrt{5} \cdot (b-a) / \varepsilon)}{\ln(\varphi)} \right\rceil. \quad (9)$$

Так как результат, полученный по формуле (9), является приближенным, необходимо по точной формуле (8) вычислить  $F_n$  и проверить выполнение неравенства (9) и, если оно не выполняется, увеличить номер  $n$  на 1.

Учитывая, что отношение соседних чисел Фибоначчи  $F_n / F_{n-1}$  с ростом  $n$  стремится к постоянной величине  $\varphi$ , можно использовать постоянный коэффициент уменьшения очередных отрезков в виде доли, равной «золотому сечению» [8]  $(\varphi - 1) \approx 0.618$  (рис. 7). В итоге за  $n$  циклов будет достигнута точность  $\Delta = 0.5(b-a)(\varphi - 1)^n$ . Учитывая, что на каждом цикле требуется выполнять по 1 дополнительному расчету, а на первом шаге на один расчет больше, суммарное количество расчетов с заданной точностью  $\varepsilon$  при условии  $\Delta \leq \varepsilon$  будет равно

$$N = 1 + \left\lceil \frac{\ln[2\varepsilon / (b-a)]}{\ln(\varphi - 1)} \right\rceil. \quad (10)$$

На рис. 8а и рис. 8б приведены графики с результатами вычислений по формулам (1),..., (10) зави-

симости требуемого количества расчетов целевой функции  $N$  при использовании описанных алгоритмов от обратной величины допустимой относительной погрешности  $\delta^{-1} = [\varepsilon / (b-a)]^{-1} = (b-a) / \varepsilon$ . Графики на рис. 8а и рис. 8б отличаются разным масштабом и диапазоном изменения аргумента  $\delta^{-1}$ . Цифрой 1 обозначены графики для алгоритма полного перебора с постоянным шагом между точками расчетов. Цифрами 2–6 обозначены графики для алгоритмов циклического перебора с переменным шагом: 2 – с двумя равноотстоящими точками расчетов на каждом цикле; 3 – с двумя точками расчетов с постоянным сдвигом от середины на каждом цикле; 4 – с тремя равноотстоящими точками расчетов на каждом цикле; 5 – с двумя точками расчетов, сдвинутыми на каждом цикле по-разному в соответствии с очередными числами Фибоначчи; 6 – с двумя точками расчетов, сдвинутыми на каждом цикле одинаково в соответствии с золотой пропорцией.

На рис. 8а и рис. 8б приведены графики с результатами вычислений по формулам (1),..., (10) зависимости требуемого количества расчетов целевой функции  $N$  при использовании описанных алгоритмов от обратной величины допустимой относительной погрешности  $\delta^{-1} = [\varepsilon / (b-a)]^{-1} = (b-a) / \varepsilon$ . Графики на рис. 8а и рис. 8б отличаются разным масштабом

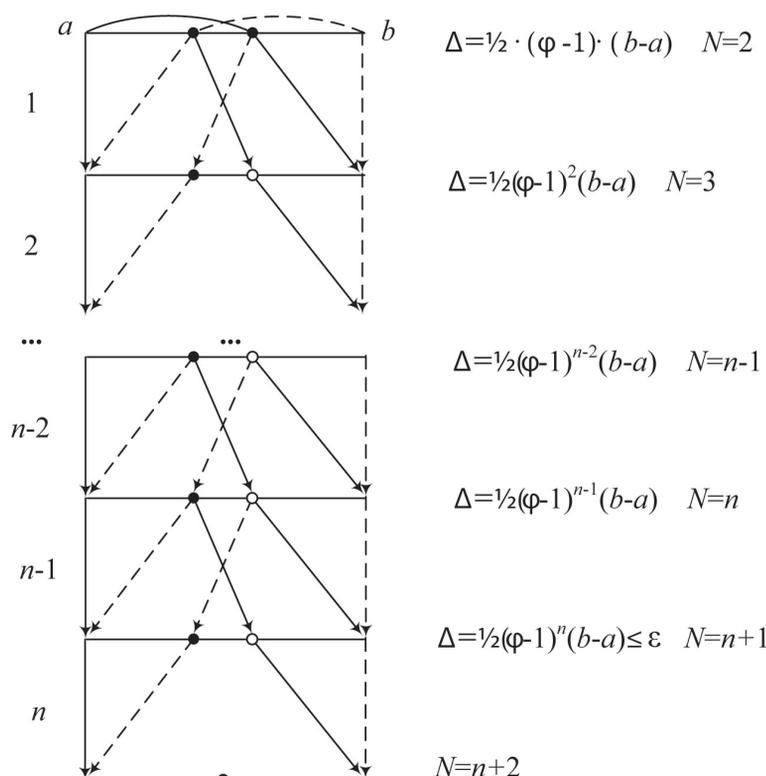
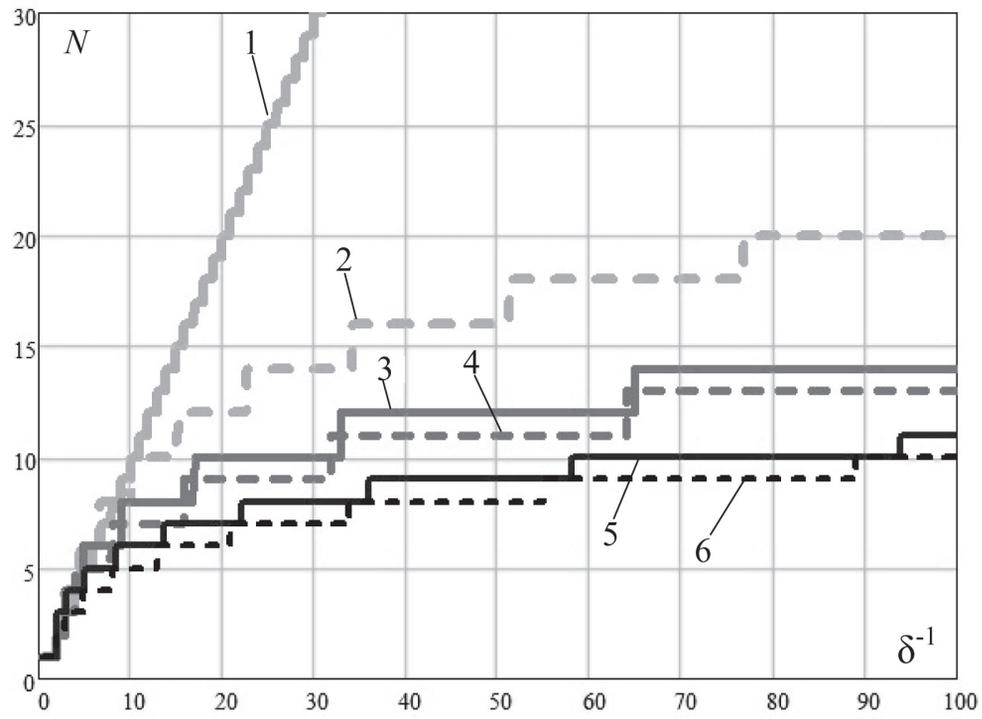
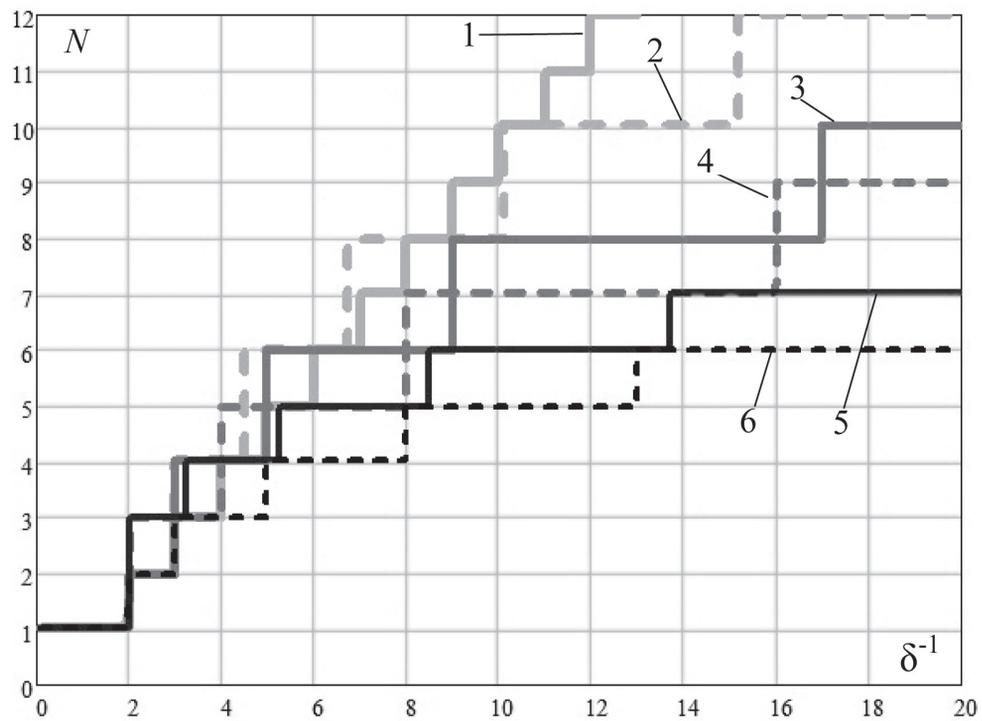


Рис. 7. Иллюстрация метода вычислений с вложенными циклами по одному расчету в одной из двух точек, расположенных в соответствии с «золотым сечением» на каждом цикле



а)



б)

Рис. 8. Зависимости требуемого количества расчетов  $N$  от обратной величины допустимой относительной погрешности  $\delta^{-1} = [\varepsilon / (b - a)]^{-1}$

и диапазоном изменения аргумента  $\delta^{-1}$ . Цифрой 1 обозначены графики для алгоритма полного перебора с постоянным шагом между точками расчетов. Цифрами 2–6 обозначены графики для алгоритмов циклического перебора с переменным шагом: 2 – с двумя равноотстоящими точками расчетов на каждом цикле; 3 – с двумя точками расчетов с постоянным сдвигом от середины на каждом цикле; 4 – с тремя равноотстоящими точками расчетов на каждом цикле; 5 – с двумя точками расчетов, сдвинутыми на каждом цикле по-разному в соответствии с очередными числами Фибоначчи; 6 – с двумя точками расчетов, сдвинутыми на каждом цикле одинаково в соответствии с золотой пропорцией.

Как видно из графиков на рис. 8, наиболее эффективными по количеству расчетов  $N$  целевой функции при любой заданной погрешности  $\delta$  являются алгоритмы поиска минимума унимодальной функции с переменным шагом, основанные на методах чисел Фибоначчи (линия 6) и «золотого сечения» (линия 5), причем последний проигрывает первому (самому эффективному) не более одного дополнительного расчета. Достаточно эффективными являются также два алгоритма, основанные на методе дихотомии, из которых более эффективным оказался нетиповой вариант с разделением области неопределенности не на три неравные области (линия 3), а на четыре равные (линия 4). При большой допустимой погрешности  $\delta^{-1} < 10$  алгоритм полного перебора (линия 1) с постоянным шагом (за один цикл) является соизмеримым по эффективности с алгоритмами перебора с переменным шагом (на разных циклах), проигрывая отдельным из них не более 1–2 расчетов, а по отношению к некоторым даже выигрывая 1 расчет.

## Заключение

В качестве показателей эффективности СМ, обеспечивающих выполнение заданных требований к качеству обслуживания ММТ, предлагается использовать показатели максимальной допустимой интенсивности трафика или минимальной необходимой ПС доступных маршрутов. Для учета этих показателей эффективности приходится решать сложные в вычислительном смысле обратные оптимизационные задачи по отношению к причинно-следственным связям и прямым формулам, вытекающим из соответствующих моделей СМО. Для подобного класса оптимизационных задач целевые функции нельзя представить в виде формул, так как они могут иметь изломы и быть невыпуклыми, что затрудняет использование градиентных методов оптимизации. Эти ЦФ имеют один экстремум, что позволяет рассчитывать на возможность применения методов унимодальной оптимизации.

В статье проанализирована вычислительная сложность шести алгоритмов унимодальной оптимизации

с постоянным и переменным шагом по критерию количества необходимых расчетов ЦФ при заданной допустимой погрешности. Наиболее эффективным оказался алгоритм с переменным шагом, соответствующим последовательности чисел Фибоначчи. Алгоритм на основе «золотого сечения» проигрывает алгоритму на основе чисел Фибоначчи не более одного дополнительного расчета. Несколько менее эффективными, но удобными для практического применения, являются два рассмотренных алгоритма, основанные на методе дихотомии, отличающиеся друг от друга по эффективности на один расчет. При большой допустимой погрешности соизмеримым по эффективности оказался простой алгоритм полного перебора с постоянным шагом, что указывает на целесообразность его использования при соответствующих исходных данных.

Дальнейшим развитием проводимых исследований может быть применение алгоритмов унимодальной оптимизации для решения обратных задач оптимизации СМ распределения ММТ между маршрутами с разной ПС и задержкой.

## Литература

1. Методика повышения эффективности обработки видеотрафика при использовании сетевых механизмов распределения мультимедийного трафика по нескольким маршрутам / С.М. Одоевский, М.И. Рафальская, С.А. Ясинский, Е.В. Сарафанников // Информация и Космос. – 2023. – № 1. – С. 6–13.
2. Дегтярев, Ю. И. Исследование операций / Ю.И. Дегтярев. – Москва : Высшая школа, 1986. – 320 с.
3. Турчак, Л. И. Основы численных методов : учебное пособие. / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2002. – 304 с.
4. Лемешко, Б. Ю. Методы оптимизации / Б.Ю. Лемешко. – Новосибирск : НГТУ, 2009. – 126 с.
5. Неймарк, Ю. И. Динамические модели теории управления / Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев. – Москва : Наука, 1985. – 400 с.
6. Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. – Москва : Наука, 1969. – 112 с.
7. Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности / А.И. Маркушевич. – Москва : Наука, 1975. – 48 с.
8. Ясинский, С. А. Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей и место в ней «золотого» сечения / С.А. Ясинский. – Санкт-Петербург : ВАС, 2006. – 124 с.