Оптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов в свободном пространстве

Optimal control of mutual maneuvering of spacecraft in free space

Гончаревский / Goncharevsky V.
Вилен Степанович
(vka@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А.Ф. Можайского» МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: взаимный маневр – mutual maneuvering; программа управления – control program; относительное движение – relative motion; энергетические затраты – power costs

Излагается решение вариационных задач по отысканию оптимальных программ управления относительным движением космических аппаратов в свободном пространстве. В результате решения задачи с фиксированными концами получена оптимальная программа управления относительным движением, найдены оптимальные законы изменения относительной скорости и относительного управляющего ускорения, а также соответствующий им показатель энергозатрат. Решение задач с подвижными концами позволило определить оптимальные значения таких параметров программы управления, как время и начальные условия выполнения взаимного маневра космических аппаратов.

The solution of variational problems for finding optimal programs for controlling the relative motion of spacecraft in free space is presented. As a result of solving the problem with fixed ends, an optimal program for controlling relative motion is obtained, optimal laws for changing the relative speed and relative control acceleration are found, as well as the corresponding energy consumption indicator. Solve problems with movable ends allowed determine the optimal values of such control program parameters, like time and initial conditions of mutual spacecraft maneuver.

Исследование оптимальных программ управления относительным движением (ОД) космических аппаратов (КА) в свободном пространстве представляет интерес по двум основным причинам. Во-первых, эти программы имеют наиболее простую структуру для технической реализации. Поэтому при выполнении взаимных маневров КА, близким по условиям к управляемому движению в свободном пространстве (например, маневр причаливания при осуществлении встречи КА с мягким контактом, который характеризуется малым значением времени его выполнения и небольшим рассогласованием по относительной дальности), целесообразна непосредственная их реализация. Во-вторых, основные результаты, полученные при их исследовании (например, значения оптимальных краевых условий и времени выполнения взаимного маневра КА), могут служить первой приближенной оценкой соответствующих значений параметров оптимального управления ОД в реальном силовом пространстве. Отыскание таких программ управления приводит к соответствующим вариационным задачам с фиксированными и подвижными концами. Ниже приводятся основные результаты их решения.

Оптимальное управление в задачах с фиксированными концами

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику ОД КА, могут быть записаны в векторно-матричной форме в виде [1]:

$$d\vec{R}/d\tau = \vec{V}, \quad d\vec{V}/d\tau = A\vec{R} + B\vec{V} + \vec{U}, \qquad (1)$$

где $\vec{U}$ – управляющее ускорение;
$\vec{R}$ – вектор относительного положения КА;
$\vec{V}$ – вектор относительной скорости КА;
τ – текущее время;
A, B – квадратные матрицы третьего порядка, вид которых определяется типом орбит КА.

В случае ОД в свободном пространстве матрицы A, B в динамической модели (1) являются нулевыми, и она принимает вид:

$$d^2\vec{R}/d\tau^2 = \vec{U}. \qquad (2)$$

4 2020.indd 124 24.12.2020 16:49:37

Так как уравнения ОД по всем трем компонентам вектора $\vec{R}$ одинаковы, то в дальнейшем для упрощения записи опустим знаки векторов, а под скаляром r_i будем понимать любую из трех координат КА, т.е.

$$d^2 r_i / d\tau^2 = u_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Функционал, характеризующий энергетические затраты (ЭЗ) на выполнение маневра по этой координате,

$$I_i = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \ddot{r}_i^2 d\tau, \tag{4}$$

а уравнение Эйлера-Пуассона

$$d^2 \ddot{r}_i / d\tau^2 = r_i^{IV} = 0, \tag{5}$$

где τ_0, τ_k – моменты начала и окончания маневра.

Для реализации минимума функционала необходимо удовлетворить уравнению Эйлера-Пуассона и условиям Клебша-Лежандра [2–8]. Условия Клебша-Лежандра в рассматриваемом случае выполняются, так как

$$F\ddot{r}_i, \ddot{r}_i = 2 > 0, \tag{6}$$

где $F = \ddot{r}_i^2$.

Следовательно, экстремаль

$$r_i = C_{1i} + C_{2i}\tau + C_{3i}\tau^2 + C_{4i}\tau^3, \tag{7}$$

являющаяся общим решением уравнения (5), доставляет функционалу (4) минимум.

Произвольные постоянные, определенные из краевых условий

$$r_i(\tau_0) = r_{i0}, \quad r_i(\tau_k) = r_{ik}, \quad v_i(\tau_0) = v_{i0}, \quad v_i(\tau_k) = v_{ik}, \tag{8}$$

равны

$$C_{1i} = r_{i0}, \quad C_{2i} = v_{i0},$$
$$C_{3i} = -[3(r_{i0} - r_{ik}) + (2v_{i0} + v_{ik})T]/T^2,$$
$$C_{4i} = [2(r_{i0} - r_{ik}) + (v_{i0} + v_{ik})T]/T^3, \tag{9}$$

где $T = \tau_k - \tau_0$.

Законы изменения оптимальной скорости

$$v_i = C_{2i} + 2C_{3i} + 3C_{4i}\tau^2, \tag{10}$$

а оптимального управляющего ускорения

$$\ddot{r}_i = 2C_{3i} + 6C_{4i}\tau. \tag{11}$$

Таким образом, оптимальная программа управления имеет вид

$$u_i = 2C_{3i} + 6C_{4i}\tau, \tag{12}$$

а оптимальное значение показателя ЭЗ

$$I_{iэ} = 12(r_{i0} - r_{ik})^2 / T^3 + 12(v_{i0} - v_{ik})(r_{i0} - r_{ik}) / T^2 + \\ + [(v_{i0} - v_{ik})^2 + 3(v_{i0} - v_{ik})^2] / T. \tag{13}$$

Суммарное значение ЭЗ на выполнение маневра по всем трем координатам

$$I_э = \sum_{i=1}^{3} I_{iэ}. \tag{14}$$

Условия трансверсальности для функционала (4)

$$(F_{vi} - dF_{\dot{v}i} / d\tau)\delta r_i + (F_i - v_i F_{vi} - \dot{v}_i F_{\dot{v}i})\delta\tau + F_{\dot{v}i}\delta v_i \Big|_{\tau_0 = 0}^{\tau_k = T} = 0, \tag{15}$$

где $F_i = \dot{v}_i^2$, $F_{vi} = dF_i / dv_i$, $F_{\dot{v}i} = dF_i / d\dot{v}_i$.

Используя эти условия, можно поставить вариационные задачи с подвижными концами, в результате решения которых определяются оптимальные значения таких параметров программ управления, как время маневра T, начальные и конечные скорости v_{i0}, v_{ik} и т.д.

Оптимальное управление в задачах с подвижными концами

Оптимальное время маневра $T_э$ определяется в результате решения вариационной задачи с подвижным левым концом по времени. Правый и левый концы экстремалей закреплены по координатам и скоростям, т.е. постоянные интегрирования находятся из краевых условий (8) и равны значениям (9). Однако так как левый конец свободен по времени, то на постоянные интегрирования (9) накладывается дополнительная связь, которую можно использовать для отыскания $T_э$. Эта связь может быть получена из условий (15), если в них положить $\delta r_i = \delta v_i = \delta\tau_0 = 0$. В результате имеем

$$(F_i - v_i F_{vi} - \dot{v}_i F_{\dot{v}i})\Big|_{\tau = T_i} = 0. \tag{16}$$

Из условия (16) следует

$$\dot{v}_{ik}^2 = (2C_{3i} + 6C_{4i}T_{iэ})^2 = 0. \tag{17}$$

Решая уравнение (17) относительно $T_{iэ}$, получаем

$$T_{iэ} = 3(r_{ik} - r_{i0})/(v_{i0} + 2v_{ik}). \tag{18}$$

Видно, что $T_{iэ}$ возрастает с увеличением разницы между начальными и конечными значениями коор-

4 2020.indd 125 24.12.2020 16:49:38

динат и с уменьшением модулей начальной и конечной скоростей. Экстремальное значение показателя ЭЗ при $T_i = T_{iэ}$

$$I_{iэ} = 4(v_{i0} + 2v_{ik})(v_{i0} - v_{ik})^2 / 9(r_{ik} - r_{i0}).$$

Оптимальная начальная скорость маневра $v_{i0э}$ определяется в результате решения вариационной задачи с подвижным правым концом по скорости. Правый и левый концы экстремалей закреплены по координатам и времени, кроме того, левый конец закреплен по скорости. Постоянные интегрирования определяются из краевых условий

$$r_i(\tau_0) = r_{i0}, \quad r_i(\tau_k) = r_{ik}, \quad v_i(\tau_k) = v_{ik}. \qquad (19)$$

Четвертое краевое ограничение получаем из условий трансверсальности

$$F_{\dot{v}i}\Big|_{\tau_0 = 0} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{v}_{i0} = 0. \qquad (20)$$

Если подставить в условия (19, 20) соотношение (7) и его производные, то получим систему линейных алгебраических уравнений четвертого порядка, в результате решения которых имеем следующие выражения для произвольных постоянных

$$C_{1i} = r_{i0}, \quad C_{2i} = -[3(r_{i0} - r_{ik}) + v_{ik}T]/2T,$$
$$C_{3i} = 0, \quad C_{4i} = (r_{i0} - r_{ik} + v_{ik}T)/2T^3. \qquad (21)$$

Подставив эти значения в соотношения (7...14), получим искомые экстремали, оптимальные управляющие функции, экстремальный показатель ЭЗ, а также выражение для оптимальной начальной скорости

$$v_{i0э} = -0{,}5v_{ik} - 1{,}5(r_{i0} - r_{ik})/T, \qquad (22)$$

$$u_{iэ} = 3(r_{i0} - r_{ik} + v_{ik}T)\tau / T^3, \qquad (23)$$

$$I_{iэ} = 3(r_{i0} - r_{ik} + v_{ik}T)^2 / T^3. \qquad (24)$$

Для отыскания оптимальной конечной скорости $v_{ikэ}$ необходимо решить вариационную задачу с подвижным левым концом по скорости. Краевые условия для определения постоянных интегрирования имеют вид

$$r_i(\tau_0) = r_{io}, \quad v_i(\tau_0) = v_{io}, \quad r_i(\tau_k) = r_{ik}. \qquad (25)$$

Четвертое краевое ограничение получается из условия трансверсальности (15) и имеет вид

$$F_{\dot{v}i}\Big|_{\tau = \tau_k = T} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{v}_{ik} = 0. \qquad (26)$$

С учетом условий (25, 26) получаем систему уравнений для определения постоянных, в результате решения которой имеем

$$C_{1i} = r_{i0}, \quad C_{2i} = v_{i0}, \quad C_{3i} = -3(r_{i0} - r_{ik} + v_{i0}T)/2T^2,$$
$$C_{4i} = (r_{i0} - r_{ik} + v_{i0}T)/2T^3. \qquad (27)$$

Подставив эти значения в соотношения (7...14), получим искомые экстремали, оптимальные управляющие функции, экстремальный показатель ЭЗ, а также выражение для оптимальной конечной скорости

$$v_{ik} = -0{,}5v_{i0} - 1{,}5(r_{i0} - r_{ik})/T,$$
$$u_{iэ} = -3(r_{i0} - r_{ik} + v_{i0}T)(1 - \tau/T)/T^2,$$
$$I_{iэ} = 3(r_{i0} - r_{ik} + v_{i0}T)^2 / T^3. \qquad (28)$$

Значения скоростей (22, 28) также могут служить первым приближением для расчета экстремальных начальных и конечных скоростей взаимного маневра КА в задачах с динамическими моделями ОД в силовом пространстве, учитывающими разностное гравитационное и кориолисово ускорения.

Литература

1. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – МО РФ, 1998. – 87 с.
2. Буслаев, В. С. Вариационное исчисление / В.С. Буслаев. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. – 288 с.
3. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 1961. – 228 с.
4. Гноенский, Л. С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.С. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
5. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1976. – 256 с.
6. Петров, Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
7. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
8. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Издательство ЛКИ, 2014. – 312 с.

4 2020.indd 126 24.12.2020 16:49:40