О решении уравнения Винера-Хопфа в замкнутом виде

About the decision of the equation on Wiener–Hopf in the closed kind

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Новиков / Novikov A.
Александр Николаевич
(novalloll@mail.ru)
кандидат технических наук.
ВКА им. А. Ф. Можайского,
доцент кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: интегральное уравнение Винера-Хопфа – Wiener-Hopf integrated equation; формула Поллачека-Хинчина – the formula of Pollachek-Hinchin; преобразование Лапласа – transformation of Laplas; характеристическая функция – characteristic function; тауберовы предельные теоремы – tauber`s limiting theorems; распределение времени ожидания – waiting time distribution.

Предложен переход от представления интегрального уравнения Винера-Хопфа к представлению интегральным уравнением Вольтерра второго рода с разностным ядром. Это позволило решить его в преобразовании Лапласа. Корректность решения в виде обратного решения проверена только для случая, когда интервалы времени между поступающими заявками и обслуживания распределены по экспоненциальным законам. Проверка правильности предельных значений распределения времени ожидания обслуживания проведена на основе формулы Поллачека-Хинчина. Также приведено решение уравнения с применением характеристических функций. Результаты исследования могут быть полезны при разработке алгоритмического обеспечения систем массового обслуживания, в качестве которых могут выступать измерительные системы, применяемые для изучения и мониторинга быстропротекающих процессов, с учетом требований к динамической составляющей погрешности совместных измерений.

A transition is proposed from the representation of the Wiener-Hopf integral equation to the representation by the Volterra integral equation of the second kind with a difference core. This made it possible to solve it in the Laplace transform. The correctness of the decision in the form of the inverse solution is checked only for the case when the time intervals between the incoming applications and services are distributed according to exponential laws. The validation of the limit values for the distribution of service waiting times was carried out on the basis of the Pollaczek-Khinchin formula. The solution of the equation using characteristic functions is also given. The research results can be useful in the development of algorithmic support for queuing systems, which can be measuring systems used to study and monitor high-speed processes, taking into account the requirements for the dynamic component of joint measurement errors.

Введение

В настоящее время в промышленности и научных исследованиях наблюдается существенное повышение требований к быстродействию и точности измерительных систем, применяемых для изучения и мониторинга быстропротекающих процессов, например таких как высокоскоростное деформирование и разрушение перспективных для оборонной отрасли материалов и конструкций в широком диапазоне условий нагружения. Такие совместные параллельно-последовательные измерения выполняются мультиплексорными измерительными средствами, использующими многоканальные измерительные модули, в основном аналогово-цифровые преобразователи (АЦП), к которым последовательно подключаются результаты аналоговых преобразований каналов. Для измерительных систем такого рода важной характеристикой является характеристика неопределенности соответствия значения измеряемой величины, зафиксированного в выходном коде, тому моменту времени, который приписывается полученному значению кода, или иначе – погрешность датирования отсчета.

В погрешность датирования отсчета, иногда называемую апертурным временем, может входить время задержки запуска, время автоматического выбора полярности и пределов измерения, время преобразования и т. д. В частном случае, когда на входе АЦП имеется устройство выборки и запоминания, погрешность датирования отсчета будет определяться только временем задержки запуска и динамическими параметрами этого устройства.

Определенная таким образом погрешность датирования отсчета представляет собой характеристику, необходимую для метрологического анализа измерительных систем, в которые входит АЦП. Заметим, что при работе АЦП в составе системы, его связь с ЭВМ осуществляется с помощью программ и специ-

альных устроиств, вызывающих задержку запуска АЦП. Несмотря на значительный прогресс современной элементной базы требования к минимизации погрешности датирования вызывают необходимость составления расписаний работы измерительных и вычислительных модулей, особенно в случаях, когда измерительная система собирает информацию об объекте для целей управления объектом, выполняя совместные измерения.

На сегодняшний день существует большое количество работ [1–5], в которых в разной степени глубины исследованы вопросы применения теории массового обслуживания для решения задачи оптимизации алгоритмов функционирования измерительных систем с учетом требований к динамической составляющей погрешности совместных измерений (погрешности датирования отсчета). Однако возможности применения для решения задачи определения оптимальных параметров функции распределения времени ожидания обслуживания (запуска) измерительного канала интегрального уравнения Винера-Хопфа [6] исследованы недостаточно полно, что в определенной степени снижает эффективность алгоритмического обеспечения, применимого для решения задачи составления расписания работы измерительной системы. Прежде всего, это связано со сложностью решения данного интегрального уравнения в исходном представлении. В данной работе предложен переход от представления интегрального уравнения Винера-Хопфа к представлению интегральным уравнением Вольтерра второго рода с разностным ядром. Это позволило решить его в преобразовании Лапласа.

Постановка задачи

Интегральное уравнение для определения функции распределения времени ожидания требования в одноканальной системе массового обслуживания (СМО) представляется в виде [7]:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-z)c(z)dz\,, \tag{1}$$

где $c(t)$ – плотность вероятности времени разности интервала между требованиями входящего потока и интервала времени обслуживания требования в СМО, равная следующему интегральному выражению:

$$c(t) = \int_{0}^{\infty} b(t+z)a(z)dz. \tag{2}$$

В работе [8] предложена гипердельтная аппроксимация для решения вероятностных задач не только с положительными случайными величинами, но и с отрицательными или смешанными случайными величинами. Она применена для решения интегрального уравнения Винера-Хопфа [6]. В этих статьях впервые применён метод решения означенного интегрального уравнения при произвольных исходных распределениях на основе сведения их к дискретному заданию. Способ решения последовательный, пошаговый. В предлагаемой статье, в отличие от пошагового процесса решения, сделана попытка решения уравнения в замкнутом аналитическом виде путём сведения его к интегральному уравнению Вольтерра. Также дополнительно представлено пошаговое решение с использованием характеристических функций, но без преобразования Фурье для решения уравнения в замкнутом виде. Эта задача остаётся на перспективу.

Решение

1. Сведение интегрального уравнения Винера-Хопфа к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

В (2) $b(t)$ и $a(t)$ – плотности вероятностей интервалов времени входящего потока и интервалов обслуживания. Нашей задачей является привести (1) к уравнению Вольтерра второго вида и попытаться решить его в замкнутом виде.

Представим (1) в следующем виде:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{0} c(z)dz + \int_{0}^{t} W(t-z)c(z)dz. \tag{3}$$

Введём обозначение $W_0 = \int_{-\infty}^{0} c(z)dz$, а второй интеграл в (3) представим в виде

$$\int_{0}^{t} W(t-z)c_{+}(z)dz. \tag{4}$$

В формуле (4) плотность вероятности $c_{+}(t)$ означает, что интегрирование производится по положительной оси абсцисс. Найдём выражение для этой плотности. Сначала вычислим интеграл

$$W_0 = \int_{-\infty}^{0} c(z)dz. \tag{5}$$

Согласно выполненным ранее исследованиям, его величину следует перенести в правую, положительную часть плотности вероятности $c(t)$. Значение этого интеграла является начальной величиной функции распределения времени ожидания обслуживания требования в СМО. Тогда плотность вероятности $c_{+}(t)$ можно представить в виде:

$$c_{+}(t) = W_0[\Phi(t-0) - \Phi(t-1) + c(t) \tag{6}$$

В выражении (6) единица выбрана для удобства представления постоянной величины вероятности W_0 дискретной постоянной ступенькой на интервале , к которой примыкает непрерывная часть плотности вероятности $c(t)$, сосредоточенная на положительной части оси абсцисс. Для того чтобы (6) была плотностью вероятности, она должна удовлетворять требованию единичного нормирования. Если оно не выполняется, тогда необходимо ввести нормирующую константу.

Однако в нашем случае проверка интегрирования для (6) подтверждает выполнение требования нормирования:

$$\int_0^\infty c_+(z)dz = 1 \tag{7}$$

В дальнейшем для выполнения приближённой аппроксимации соответствующего (7) распределения вероятностей нам потребуются значения величин двух начальных моментов и среднеквадратического отклонения (СКО).

В дальнейшем мы рассмотрим два примера, из которых один с малой загруженностью, а второй с большой загруженностью СМО.

а) Для примера с малой загруженностью СМО примем следующие исходные данные:

$$b(t) = dnorm(t, n, \delta),\ n = 15h.,\ \delta = 5h.;$$
$$a(t) = dnorm(t, m, \sigma),\ m = 10h.,\ \sigma = 3h.$$

В этом случае, применив выражение (6) для определения плотности вероятности и начальных моментов и СКО, получим:

$$W_0 = 0.196,\ \nu_{11} = 4.991h., \nu_{21} = 55.466h^2, \sigma_{11} = 5.832h.$$

На рис. 1 показаны графики функций $c(t)$ и $c_+(t)$. На рисунке введено дополнительное обозначение для введенной функции (6) $cn(t) = c_+(t)$. Оба графика различаются значительно лишь в начале оси абсцисс и незначительно в её правой части.

б) Для примера с большой загруженностью СМО примем следующие исходные данные:

$$a(t) = dnorm(t, n, \delta),\ n = 15h.,$$
$$\delta = 5h.;\ b(t) = dnorm(t, m, \sigma),\ m = 10h.,\ \sigma = 3h.$$

В этом случае, применив выражение (6) для определения плотности вероятности и начальных моментов и СКО, получим:

$$W_0 = 0.805,\ \nu_{12} = 1.02h., \nu_{22} = 3.565h^2, \sigma_{22} = 1.589h.$$

На рис. 2 показаны графики функций $c(t)$ и $c_+(t)$. По сравнению с рис. 1 на данном рисунке функция $cn(t) = c_+(t)$ на хвосте более растянута и приподнята над функцией $c(t)$.

Определение нормальных аппроксимирующих плотностей для $c_+(t)$.

а) Для этого варианта имеем $\nu_{11} = 4.991h., \sigma_{12} = 6.832h.$

$$cn_1(t) = \frac{1.12}{\sqrt{2\pi}\sigma_{12}} \cdot e^{-\frac{(t-\nu_{11})^2}{2(\sigma_{12})^2}} \tag{8}$$

б) Для этого варианта имеем $\nu_{12} = 6.998h., \sigma_{22} = 4.469h.$

$$cn_2(t) = \frac{1.244}{\sqrt{2\pi}\sigma_{12}} \cdot e^{-\frac{(t-\nu_{12})^2}{2(\sigma_{22})^2}} \tag{9}$$

На рис. 3 и 4 показаны графики плотностей вероятностей (8) и (9).

Приведём также их гипердельтные аппроксимации и графики.

а) Для этого варианта имеем

$$cn_1a(t) = \frac{1}{2}(\Delta(t - \nu_{11} + \sigma_{12}) + \Delta(t - \nu_{11} - \sigma_{12})) \tag{10}$$

б) Для этого варианта имеем

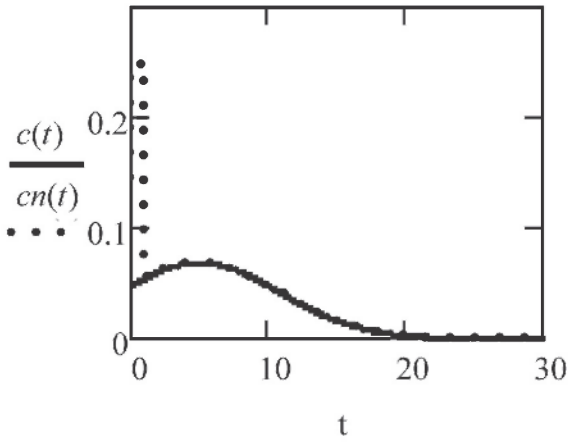

Рис. 1

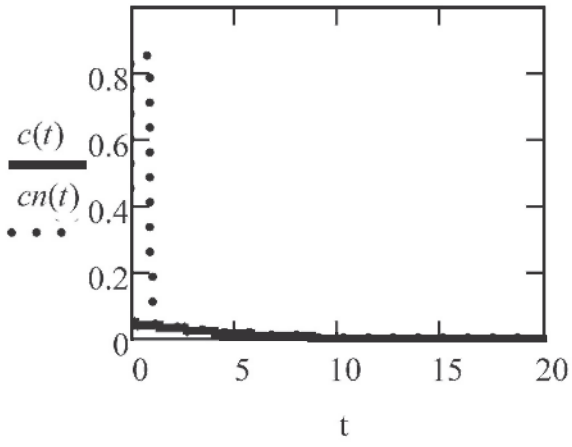

Рис. 2

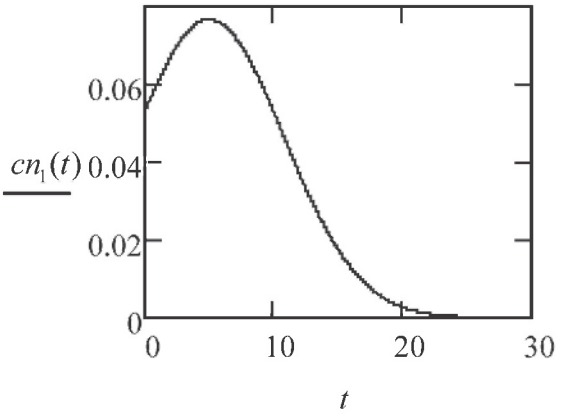

Рис. 3

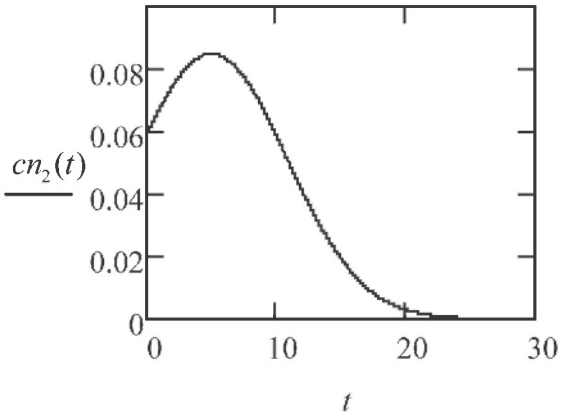

Рис. 4

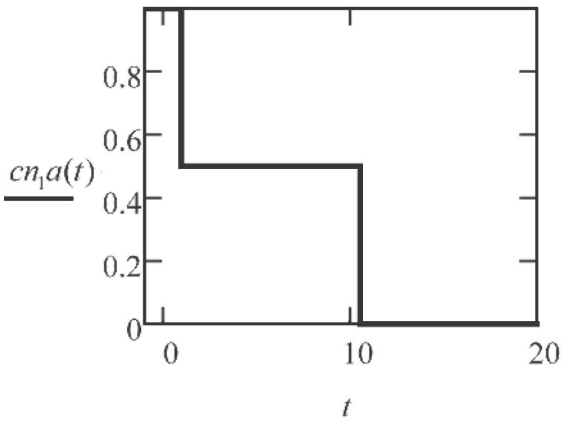

Рис. 5

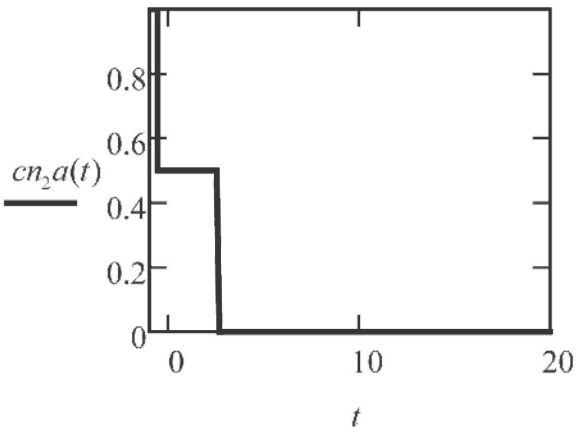

Рис. 6

$$cn_2a(t) = \frac{1}{2}(\Delta(t - \nu_{12} + \sigma_{22}) + \Delta(t - \nu_{12} - \sigma_{22})) \tag{11}$$

На рис. 5 и 6 показаны графики плотностей вероятностей (10) и (11).

Ось абсцисс на рисунках 5 и 6 начинается с минус единицы.

Представление выражения (3) с учётом (4) и (5) в преобразовании Лапласа. Запись решения интегрального уравнения в преобразовании Лапласа принимает следующий вид

$$W_+^*(s) = \frac{W_0^*(s)}{s(1 - c_+^*(s))} \tag{12}$$

Для того чтобы решить (11) в этом преобразовании необходимо найти выражение для $c_+^*(s)$, что представляет достаточно трудную задачу. Это особенно трудно выполнить для оригиналов (8) и (9). Проще это выполнить для выражений (10) и (11). Покажем результаты.

$$cn_1a^*(s) = \frac{1}{2}[e^{-(\nu_{11} - \sigma_{12})s} + e^{-(\nu_{11} + \sigma_{12})s}] \tag{13}$$

$$cn_2a^*(s) = \frac{1}{2}[e^{-(\nu_{12} - \sigma_{22})s} + e^{-(\nu_{12} + \sigma_{22})s}] \tag{14}$$

Можно преобразовать (8) и (9) также в экспоненциальную форму, если воспользоваться аппаратом характеристических функций. Однако в этом случае решение интегрального уравнения нужно производить не с использованием преобразования Лапласа, а с применением преобразования Фурье. Но пока этого мы не применяем.

Представим константу в формуле (6)

$$W_0[\Phi(t-0) - \Phi(t-1)]$$

в преобразовании Лапласа:

$$W_0^*(s) = W_0 \frac{1 - e^{-s}}{s} \tag{15}$$

Теперь для решения уравнения (12) остаётся найти выражение для изображения Лапласа плотности вероятности на положительной части оси абсцисс $c_+^*(s)$. В

двух предельных точках значения функции распределения времени ожидания требования в СМО можно найти на основе применения тауберовых теорем типа $W(\infty)=\lim_{s\to 0} sW^*(s)$, $W(0)=\lim_{s\to\infty} sW^*(s)$. При этом должны наблюдаться соотношения для а) $W(\infty)=1, W(0)=0.195$; для б) $W(\infty)=1, W(0)=0.805$.

Однако в этом случае лёгкому решению должно предшествовать получение достаточно простого представления в изображении Лапласа выражения для $c^*(s)$.

Пример. Рассмотрим простой пример сравнения предельных значений по формуле (12) и по формуле Поллачека-Хинчина при обоих экспоненциальных распределениях.

а) Предлагаемый метод (12). Исходные преобразования Лапласа:

$$W^*(s)=\frac{W_0^*(s)}{s(1-c_+^*(s))},\ W_0^*(s)=W_0\frac{1-e^{-s}}{s}$$

Представим $c_+^*(s)$ в форме Поллачека-Хинчина

$$c_+^*(s)=\frac{(b-a)(s+b)}{b(s+b-a)},$$

подставим это выражение формулу (12) и найдём предельные значения.

Следует иметь ввиду, что, $W_0=1-\rho,\ \rho=\frac{a}{b}$,
где a – интенсивность входящего потока;
b – интенсивность потока обслуживания.

Получаем:

$$\lim_{s\to\infty} sW^*(s)=1-\rho,\ \lim_{s\to 0} sW^*(s)=1, \tag{16.1}$$

что соответствует ожидаемым показателям нашего случайного процесса.

б) Теперь непосредственно изображение Лапласа плотности вероятности в форме Поллачека-Хинчина испытаем на предельные значения, не применяя формулу (15). Используя обозначения [9]

$$\omega(s)=\frac{(b-a)(s+b)}{b(s+b-a)},\ b>a,\ \rho=\frac{a}{b},$$

Получаем:

$$\lim_{s\to\infty}\omega(s)=1-\rho,\ \lim_{s\to 0}\omega(s)=1. \tag{16.2}$$

Таким образом, результаты обоих примеров совпадают полностью. Но это справедливо лишь в случае экспоненциальных распределений интервалов входящего и обслуживающего случайных потоков [10]. На этом заканчиваем рассмотрение примера.

Если выражения в преобразованиях Лапласа оказываются достаточно сложными, тогда для нахождения обратных преобразований можно использовать известную приближённую формулу Алфрея [11]:

$$W(t)\approx sW^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{t}} \tag{17}$$

Тогда равенство (17) будет представлено в виде:

$$W(t)\approx\frac{W_0^s(\frac{1}{t})}{1-c_+^*(\frac{1}{t})} \tag{18}$$

Но в этом случае следует иметь в виду, что она приводит к точному представлению при начальных значениях на оси абсцисс, а с увеличением величины абсцисс точность получаемого оригинала снижается и тем больше, чем больше расстояние от начала координат.

Поэтому, учитывая указанные трудности решения уравнения (12), на наш взгляд, можно попытаться использовать другой подход, основанный на применении характеристических функции теории вероятностей [12, 13].

Решение интегрального уравнения Винера-Хопфа с применением характеристических функций

Трудность решения уравнения Винера-Хопфа в замкнутом аналитическом виде и сомнительная корректность выкладок в предшествующем разделе вынуждают нас искать и другой подход к возможному решению означенного уравнения. Это поэтапный путь решения уравнения.

1. Первый шаг. Пусть исходной информацией является выражение $c(t)=\int_0^\infty b(t+z)a(z)dz$, представляющее плотность вероятности разности случайных интервалов входящего и обслуживающего потока СМО, характеристическая функция которой может быть выражена следующим образом:

$$\varphi_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt}c(z)dz \tag{19}$$

Введем следующие выражения

$$W_0=\int_{-\infty}^{0} c(z)dz,\ W_0(t)=$$
$$=W_0(\Phi(t-0)-\Phi(t-1)),\ \varphi_0(t)=C_0\int_0^t e^{izt}c(z)dz, \tag{20}$$

где первое выражение определяет величину начального значения функции распределения вероятности обслуживания (ФРВО) в СМО, второе выражение –

аппроксимация положительного скачка вероятности в начале оси положительной полуоси абсцисс. Третье выражение – характеристическая функция остаточной части плотности $c(t)$ на положительной оси с учётом константы нормирования C_0.

С учётом импульса вероятности, перенесённой на положительную полуось, построим остаточную плотность вероятности в виде:

$$c_1(t) = C_1[W_0(\Phi(t-0) - \Phi(t-1))\Delta(t) + c(t)], \qquad (21)$$

где C_1 – константа нормирования для этой плотности, представленная следующим выражением:

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} c_1(z)dz} \qquad (22)$$

Соответствующая (21) характеристическая функция представляется как

$$\varphi_1(t) = \int_0^{\infty} e^{izt} c_1(z)dz \qquad (23)$$

В соответствии с Клейнроком [7], когда мы сначала свёртывали единицу с плотностью (2) и получали новую плотность и характеристическую функцию для того, чтобы выполнить на следующем шаге аналогичную процедуру. Теперь место единицы занимает найденная характеристическая функция (23). В нашем случае исходные характеристические функции представляют 1 и (19). Поэтому результат свёртки на этом шаге:

$$\varphi_{01}(t) = 1\,\varphi_0(t).$$

2. *Второй шаг.* Исходной информацией на этом шаге являются плотность вероятности (21) и её характеристическая функция (23). Определяем начальное значение ФРВО и величину импульсной вероятности в нуле абсцисс и новую плотность вероятности:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{0} c_1(z)dz,\ W_1(t) = W_1(\Phi(t-0) - \Phi(t-1)) \qquad (24)$$

$$c_2(t) = C_2[W_1(t-0) - \Phi(t-1)) + c_1(t)],\ C_2 = \frac{1}{\int_0^{\infty} c_2(z)dz} \qquad (25)$$

Характеристическая функция для (25) равна:

$$\varphi_2(t) = \int_0^{\infty} e^{izt} c_2(z)dz \qquad (26)$$

Поэтому результирующая характеристическая функция определится как

$$\varphi_{02}(t) = 1\varphi_0(t)\varphi_1(t) \qquad (27)$$

3. *Третий шаг.* На этом шаге процесс, аналогичный изложенному процессу на втором шаге, продолжается.

Окончание процесса

Предположим, что выполнено n шагов. Затем выполнен ещё один n+1 – процесс. Если при сравнении характеристические функции n-го и (n+1)-го шагов совпадают с допустимой погрешностью, то процесс останавливается. Это означает, что наблюдается стационарность процесса. Соответствующая ему ФРВО является стационарной. Её можно построить по начальному значению ФРВО W_1 и суммируему к нему выражению

$$W_i(t) = \int_0^{t} c_i(z)dz.$$

Заключение

Из сравнения первого и второго разделов статьи можно сделать вывод о том, что представление интегрального уравнения Винера-Хопфа интегральным уравнением Вольтерра второго рода с разностным ядром не является достаточно корректным. Последнее может служить только для определения начального значения ФРВО. Конечное значение правильно не определяется. Применение характеристических функций позволяет определить стационарную ФРВО путём применения последовательных приближений. Но этот подход является длительным по времени решения, а значит достаточно затратным. Однако при его применении можно получить все переходные ФРВО. Проблемным остаётся вопрос о решении уравнения Винера-Хопфа в замкнутом виде с применением преобразования Фурье.

Литература

1. Основы структурного проектирования измерительно-вычислительных систем / В.В. Алексеев [и др.]. – СПб.: Энергоатомиздат, 1999. – 110 с.

2. Королев, П. Г. Применение задач теории расписаний для проектирования измерительных систем / П.Г. Королев // Известия ЭТИ. – 1994. – Вып. 469. – С. 36–40.

3. Раннев, Г. Г. Измерительные информационные системы / Г.Г. Раннев. – М.: Academia, 2010. – 336 с.

4. Алексеев, В. В. Измерительно-вычислительные системы / В.В. Алексеев, Б.Г. Комаров, П.Г. Королев. – СПб.: СПбГЭТУ, 2008. – 140 с.

5. Шевчук, В. П. Расчет динамических погрешностей интеллектуальных измерительных систем / В.П. Шевчук. – М.: Физмалит, 2008. – 126 с.

6. Смагин, В. А. Решение интегрального уравнения Винера-Хопфа методом гипердельтной аппроксимации / В.А. Смагин // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2016. – № 1. – С. 1–7.

7. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания: учебник / Л. Клейнрок ; пер. И.И. Глушко ; ред. В.И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

8. Смагин, В. А. Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов / В.А. Смагин // Информация и Космос. – 2015. – № 4. – С. 60–64.

9. Риордан, Дж. Вероятностные системы обслуживания / Дж. Риордан ; пер. с англ. Е.Г. Коваленко под ред. А. Д. Харкевича. – М.: Издательство «Связь», 1966. – 184 с.

10. Payanden Najafabadi, A. T. An Approximate To Solution Of Winer-Hopf Integral Equation / A.T. Payanden Najafabadi, D. Kucerovsky // Proceeding of the World Congress on Engineering 2009. Vol. II WCE 2009, July 1–3, 2009, London, U.K.

11. Mansotral, P. Winer-Hopf Equation Technique for Generalized Variational Inequalities and Nonexpansive Mapping / P. Mansotral, B.S. Komal // Applied Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 6, No. 18. – P. 869–878.

12. Novak, M. A. Approximation method for a class of discrete Winer-Hopf equation / M.A. Novak // Opuscula Mathematica. – Vol. 29. – No. 3. – P. 271–288.

13. Chakraborty, S. Some Applications of Dirac's Delta-Function in Statistics for More Than One Random Variable / S. Chakraborty // Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). – Vol. 3, Issue I (June 2008). – P. 42–54.