Теорема о максимальной вероятности ошибки кода в дискретном широковещательном канале связи

The code error maximum probability theorem in discrete broadcast communication channel

Сысуев / Sysuev S.
Сергей Юрьевич
(sysuev1971@mail.ru)
кандидат военных наук, доцент.
ФГКВОУ ВО «Михайловская военная артиллерийская академия» МО РФ,
начальник Научно-исследовательского центра.
г. Санкт-Петербург

Синюк / Sinyuk A.
Александр Демьянович
(eentrop@rambler.ru)
доктор технических наук, доцент.
ФГКВОУ ВО «Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С. М. Буденного» МО РФ (ВАС им. С. М. Буденного),
профессор.
г. Санкт-Петербург

Остроумов / Ostroumov O.
Олег Александрович
(oleg-26@mail.ru)
кандидат технических наук.
ВАС им. С. М. Буденного,
преподаватель.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: пропускная способность широковещательного канала связи – broadcast channel bandwidth; совместная информация – joint information; информационной емкость – information capacity; неопределенность – uncertainty; прямая теорема кодирования – direct coding theorem; оценка информационной эффективности передачи информации по широковещательному каналу – information transmission information efficiency evaluation over broadcast channel.

Результаты ранее опубликованных работ связаны с введением модели широковещательного канала, понятий совместной информации, информационной емкости и неопределенности, а также с доказательством обратной теоремы кодирования. Выполняется доказательная оценка максимальной вероятности ошибки кода в исследуемом канале, которая необходима для доказательства прямой теоремы кодирования. Совокупность полученных результатов развивает исследования известных моделей широковещательных каналов и обеспечивает условия оценки информационной эффективности.

The results of previously published papers are related to the introduction of the broadcast channel model, the concepts of shared information, information capacity and uncertainty, as well as the inverse coding theorem proof. The code error maximum probability evidentiary estimate in the channel under study, which is necessary to prove the direct coding theorem, is performed. The totality of the results obtained develops studies of well-known broadcast channels models and provides conditions for evaluating information efficiency.

Введение

В работах [1, 2] с целью получения точных оценок информационной эффективности дискретного широковещательного канала (ШВК) без памяти приведена постановка задачи кодирования, введена информационная мера совместной информации (СИ) [1], описывающая передачу сообщения, и выполнено всестороннее исследование ее свойств. В [3] введены понятия информационной емкости и неопределенности канала, а также доказана обратная теорема кодирования. Цель дальнейшего изложения состоит в том, чтобы доказать, что для дискретного ШВК (ДШВК) информационная емкость C^* и пропускная способность совпадают. Для этого требуется доказать прямую теорему кодирования, в которой утверждается существование кода со скоростью $R < C^*$, обеспечивающего сколь угодно малую заданную наперед вероятность ошибки. Для этого необходимо сформулировать и доказать теорему о максимальной вероятности ошибки кода в ДШВК, результаты которой используются в доказательстве прямой теоремы кодирования. Полученные результаты углубляют известные исследования по оценке моделей ухудшающегося [4–7], релеевского [8, 9] и Гауссовского [10–13] ШВК.

Обозначения, предположения и необходимые результаты предыдущих исследований

В [1, 2] показано, что передача сигналов по ШВК определяется двумя каналами с общим входным

алфавитом X, выходными алфавитами Y, M, которые представляются тремя дискретными множествами с сообщениями $x \in X$, $y \in Y$, $m \in M$. На основе ансамбля $\{XYM,\ p(x,\ y,\ m)\}$, где $p(\cdot)$ – вероятность события [14, 15], который образован всеми тройками $(x, y, m) \in XYM$ и ансамблей $\{X, p(x)\}$, $\{Y, p(y)\}$, $\{M, p(m)\}$, $\{XY, p(x,y)\}$, $\{XM, p(x,m)\}$ в [1, 2] введено понятие среднего количества СИ $F(X;Y;M)$. В случае если добавлен еще один канал $\{Z, p(z)\}$ с ансамблем $\{XZ, p(x,z)\}$, определено понятие условной средней СИ $F(X;Y;M/Z)$.

В [3] доказано, что при условии если каждая составляющая ШВК описывается моделью дискретного симметричного канала (ДСК) [16, 17], равномерное входное распределение вероятностей ШВК [14, 15] обеспечит максимальную величину средней СИ. Показано, что информационная емкость C^* определяется посредством СИ $C^* = \max\limits_{\{p(x)\}} F(X;Y;M)$.

Пусть для любых последовательностей $x \in X^n$, $y \in Y^n$, $m \in M^n$, где X^n – декартова n-я степень множества X (т.е. совокупность последовательностей длины n элементов множества (алфавита) X), Y^n – декартова n-я степень множества Y, M^n декартова n-я степень множества M. задано распределение $p(x)$ на входных последовательностях ШВК $x \in X^n$. Оно совместно с условными вероятностями, посредством которых задается ШВК $\{X^nY^nM^n, p(y/x), p(m/x)\}$, определяет $\{X^nY^nM^n, p(y/x), p(m/x), p(x)\}$.

Рассмотрим ШВК с переходными вероятностями $p(y/x)$ и $p(m/x)$, $x \in X^n$, $y \in Y$ и $m \in M^n$. Пусть $F(x;y;m)$ – совместная информация между тремя последовательностями $x \in X^n$, $y \in Y^n$, $m \in M^n$, вычисленная по распределению $p(\bar{x})$, и согласно утверждения [1] $F(X;Y;M) = I(Y;M)$, где $I(\bullet;\bullet)$ – взаимная информация ансамблей [18]. Тогда для $F(x;y;m)$ запишем:

$$F(\bar{x};\bar{y};\bar{m}) = \log\left(\frac{p(\bar{y}/\bar{m})}{p(\bar{y})}\right) = \log\left(\frac{p(\bar{m}/\bar{y})}{p(\bar{m})}\right) = \log\left(\frac{p(\bar{m},\bar{y})}{p(\bar{m})p(\bar{y})}\right), \quad (1)$$

где

$$p(\bar{y}/\bar{m}) = \frac{p(\bar{y},\bar{m})}{p(\bar{m})}, \quad p(\bar{y},\bar{m}) = \sum_{X^n} p(\bar{x})p(\bar{m}/\bar{x})p(\bar{y}/\bar{x}),$$

$$p(\bar{y}) = \sum_{X^n} p(\bar{x})p(\bar{y}/\bar{x}), \quad p(\bar{m}/\bar{y}) = \frac{p(\bar{y},\bar{m})}{p(\bar{y})},$$

$$p(m) = \sum_{X^n} p(x)p(m/x).$$

Обозначим S – некоторое подмножество X^n, а V_τ – множество таких троек $(\bar{x},\bar{y},\bar{m})$, что $F(x;y;m) > n\tau$, где τ – некоторое положительное число:

$$V_\tau = \{(\bar{x},\bar{y},\bar{m}) : F(\bar{x};y;\bar{m}) > n\tau\}. \quad (2)$$

Ниже будет доказана истинность неравенства о максимальной вероятности ошибки кода для условий исследуемой модели ШВК. Доказательство теоремы о максимальной вероятности ошибки кода для условий ДСК называется доказательством неравенства Файнстейна и приведено в [18–20].

Теорема о максимальной вероятности ошибки кода в дискретном широковещательном канале связи

Теорема. Пусть τ – произвольнее положительное число, S – произвольное подмножество X^n и $p(x)$ – произвольное распределение на X^n. Тогда для каждого n, $n = 1,2, \ldots$, существует код $G(n,R)$, каждое слово которого принадлежит S, а максимальная вероятность Λ_n ошибки декодирования удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_n \le \frac{1}{\Pr(S)}\left[2^{-n(\tau-R)} + 1 - \Pr(V_\tau)\right], \quad (3)$$

где $\Pr(S)$ – вероятность того, что в соответствии с распределением $p(x)$ случайно будет выбрана x принадлежащая подмножеству S

$$\Pr(S) = \sum_{x \in S} p(x), \quad (4)$$

и $\Pr(V_\tau)$ вероятность множества V_τ

$$\Pr(V_\tau) = \sum_{(\bar{x},\bar{y},\bar{m}) \in V_\tau} p(x)p(m/x)p(y/x). \quad (5)$$

Доказательство. Для доказательства существования кода, указанного в теореме, будем пользоваться методом, который называется методом максимальных кодов [19, 20]. В соответствии с этим методом, содержание которого будет изложено ниже, покажем, что для всякого фиксированного $\alpha > 0$ можно построить код $G(n, R)$ с $\Lambda_n = \alpha$, каждое слово которого принадлежит S, а скорость R удовлетворяет неравенству

$$2^{nR} > 2^{n\tau}\left[\Pr(S)\alpha - (1 - \Pr(V_\tau))\right]. \quad (6)$$

Очевидно, что неравенство (6) эквивалентно неравенству (3) и, следовательно, доказательство существования кода, скорость которого удовлетворяет неравенству (6), эквивалентно доказательству утверждения теоремы. Предположим, что $\Lambda_n \Pr(S) > 1 - \Pr(V_\tau)$. В противном случае, утверждение теоремы тривиально, так как неравенство (6) выполняется при $2^{nR} = 1$, а код из одного кодового слова имеет вероятность ошибки декодирования, равную нулю. Зафиксируем некоторое n и построим код длины n, выбирая кодовые слова из множества S. Для того чтобы определить решающие области, введем в рассмотрение для каждого $x \in X^n$ множество $D(x)$ (см. рис. 1):

$$D(\bar{x}) = \{(\bar{y},\bar{m}) : \bar{y} \in Y^n, \bar{m} \in M^n, F(\bar{x};\bar{y};\bar{m}) > n\tau\}. \quad (7)$$

Тогда множество V_τ можно определить следующим образом:

$$V_\tau = \{(x, y, m) : x \in X^n, (y, m) \in D(x)\}. \quad (8)$$

Пусть $u_1, u_2, ..., u_{M_0}$ – кодовые слова. Считаем, что решающие области $L_1, L_2, ..., L_{M_0}$ определяются следующим способом:

$$L_1 = D(u_1),\ L_i = D(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j,\ i = 2, ..., M_0, \quad (9)$$

где \ – знак вычитания множеств ($C \setminus N$ есть множество всех элементов, принадлежащих C, но не принадлежащих N).

Предположим, что можно выбрать M_0 кодовых слов, где каждое принадлежит множеству S, и M_0 решающих областей, удовлетворяющих условиям (9), причем условные вероятности ошибок декодирования λ_i удовлетворяют

$$\lambda_i = \Pr((m, y) \notin L_i / u_i) < \alpha,\ i = 1, ..., M_0, \quad (10)$$

где α произвольное число из интервала (0, 1].

Предположим, что M_0 – это максимальное число, для которого можно осуществить указанный выбор.

Покажем, что $M_0 > 1$, т. е. что существует по крайней мере одно кодовое слово из S, удовлетворяющее указанным выше условиям. Для этого предположим противное, а именно что для всех $x \in SX$ выполняется неравенство

$$\Pr((m, \bar{y}) \in D(x) / x) < 1 - \alpha. \quad (11)$$

Тогда должно выполняться следующее неравенство:

$$\sum_{\bar{x} \in S} \Pr((m, y) \in D(x) / x) p(x) < (1 - \alpha) \Pr(S). \quad (12)$$

С другой стороны, из формулы (8) следует, что

$$\Pr(V_\tau) = \sum_{X^n} \Pr((\bar{m}, \bar{y}) \in D(\bar{x}) / \bar{x}) p(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{S} \Pr((m, y) \in D(x) / x) p(x) + \sum_{X^n \setminus S} \Pr((m, y) \in D(x) / x) p(x). \quad (13)$$

Так как

$$\sum_{X^n \setminus S} \Pr((m, y) \in D(x) / x) p(x) < \sum_{X^n \setminus S} p(\bar{x}) = 1 - \Pr(S), \quad (14)$$

то $\Pr(V_\tau) < (1 - \alpha)\Pr(S) + 1 - \Pr(S) = 1 - \alpha \Pr(S) < 1 - \Lambda_n \Pr(S)$, что противоречит исходному предположению о том, что $\Lambda_n \Pr(S) > 1 - \Pr(V_\tau)$. Таким образом, $M_0 > 1$ и хотя бы один шаг при построении кода выполнить можно. M_0 есть объем максимального кода. К выбранному коду нельзя добавить ни одного слова так, чтобы оно принадлежало множеству S и не были нарушены условия (10). Следовательно, для любого $x \in S$ должно выполняться неравенство

$$\Pr\left((m, y) \in D(x) \setminus \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j \Big/ \bar{x} \right) < 1 - \alpha. \quad (15)$$

В противном случае, выбор можно было бы продолжить, положив $u_{M_0+1} = x$ и $L_{M_0+1} = D(x) \setminus \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j$; при этом $\lambda_{M_0+1} < \alpha$ и код не был бы максимальным. Так как для произвольных событий C, N выполняется неравенство $\Pr(C \setminus N) > \Pr(C) - \Pr(N)$ [14, 15, 21], то, используя это неравенство для оценки левой части соотношения (15), получим

$$\Pr((m, y) \in D(x) / \bar{x}) < 1 - \alpha + \Pr\left((\bar{m}, y) \in \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j / x \right). \quad (16)$$

Это неравенство имеет место для всех последовательностей $x \in S$, поэтому левую и правого его части

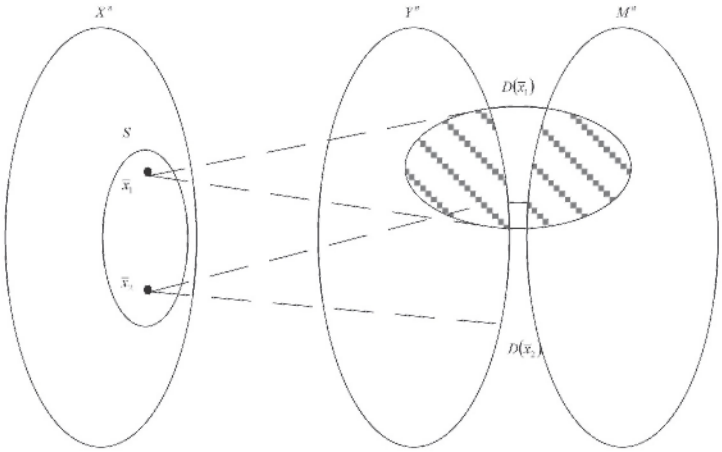

Рис. 1. Множества $D(\bar{x})$

можно усреднить по S. Для этого умножим обе части (16) на $p(x)$ и просуммируем по $x \in S$. В результате получим

$$\sum_S \Pr((\bar{m},\bar{y}) \in D(\bar{x})/\bar{x})p(\bar{x}) < (1-\alpha)\Pr(S) + \\ + \Pr\left(x \in S, (m,\bar{y}) \in \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j\right). \quad (17)$$

Из соотношений (13) и (4) следует, что

$$\sum_S \Pr((m,\bar{y}) \in D(x)/x)p(x) = \Pr(V_\tau) - \\ - \sum_{X^n \setminus S} \Pr((\bar{m},\bar{y}) \in D(\bar{x})/\bar{x})p(\bar{x}) \geq \\ > \Pr(V_\tau) - 1 + \Pr(S). \quad (18)$$

Используя это и предыдущее неравенство, можно получить, что

$$\Pr\left(x \in S, (m,y) \in \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j\right) < \alpha \Pr(S) - [1 - \Pr(V_\tau)]. \quad (19)$$

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы, необходимо связать левую часть этого неравенства с числом M_0. Для этого с использованием леммы о не превышении вероятности объединения M_0 множеств решающих областей над суммой M_0 членов из вероятностей этих областей заметим, что

$$\Pr\left(x \in S, (m,y) \in \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j\right) < \Pr\left((m,y) \in \bigcup_{j=1}^{M_0} L_j\right) \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{M_0} \Pr((m,y) \in L_j). \quad (20)$$

Оценим вероятность $\Pr((\bar{m},\bar{y}) \in L_j)$ того, что пара выходных последовательностей канала ШВК попадет в решающую область L_j. Для любой тройки $(\bar{x},\bar{y},\bar{m})$, для которой $F(\bar{x};\bar{y};\bar{m}) > n\tau$, имеет место неравенство

$$\log\left(\frac{p(\bar{y}/\bar{m})}{p(\bar{y})}\right) = \log\left(\frac{p(\bar{m}/\bar{y})}{p(\bar{m})}\right) > n\tau \quad (21)$$

и следовательно,

$$p(\bar{y}/\bar{m}) > p(\bar{y})2^{n\tau}. \quad (22)$$

Суммируя обе части последнего неравенства по всем $y \in D(x_j)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$1 > \Pr(\bar{y} \in D(\bar{x}_j)/\bar{m}) > \Pr(\bar{y} \in D(\bar{x}_j))2^{n\tau} > \Pr(\bar{y} \in L_j)2^{n\tau}, \quad (23)$$

где последнее неравенство есть следствие того, что L_j – подмножество $D(\bar{x}_j)$. Тогда

$$\Pr(y \in L_j) < 2^{-n\tau}. \quad (24)$$

Подобным образом, выполняя преобразования как в (21) – (24) получаем

$$\Pr(\bar{m} \in L_j) < 2^{-n\tau}. \quad (25)$$

Для совместной вероятности $p(y,\bar{m})$ можно записать

$$p(y,m) = p(y/m)p(m) < p(m), \quad (26)$$

или

$$p(y,m) < p(m), \quad (27)$$

где знак равенства в (27) будет в случае совпадения y и m. Используя (26) и (27), рассмотрим вероятность

$$\Pr(m \in L_j) = \sum_{m \in L_j} \sum_{y \in L_j} p(\bar{y},\bar{m}) + \sum_{m \in L_j} \sum_{\bar{y} \notin L_j} p(y,m) = \\ = \Pr((\bar{y},\bar{m}) \in L_j) + \sum_{m \in L_j} \sum_{y \notin L_j} p(\bar{y},\bar{m}). \quad (28)$$

Тогда

$$\Pr(m \in L_j) > \Pr((y,m) \in L_j), \quad (29)$$

где знак равенства в (29) будет в случае совпадения y и m. Подобным образом выполняя преобразования как в из (21) – (24) получаем

$$\Pr(\bar{y} \in L_j) > \Pr((\bar{y},\bar{m}) \in L_j). \quad (30)$$

Учитывая неравенства (19), (20), (24), (30) (или (19), (20), (25), (29)), а также что $M_0 = 2^{nR}$ и $\Lambda_n < \alpha$, получим неравенство (3).

Теорема доказана.

Возможность применения результатов теоремы для доказательства прямой теоремы кодирования

В теореме утверждается существование кода, слова которого принадлежат $S \subset X^n$ и максимальная вероятность ошибки определяется в соответствии с (3). Значение правой части неравенства можно изменять, меняя величины слагаемых и соотношение между ними за счет выбора τ и распределения вероятностей на входе. Для доказательства прямой теоремы кодирования ШВК необходимо установить, можно ли подобрать τ и входное распределение так, чтобы оба слагаемых убывали к нулю при возрастании n. Покажем, что эта задача сводится к исследованию случайной величины $\frac{1}{n}F(\bar{x};\bar{y};\bar{m})$. Предположим, что $S = X^n$, тогда

$\Pr(S)=1$ при любом распределении на входе. Положим $R = C^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и

$$\tau = C^* - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{31}$$

где C^* – информационная емкость канала ШВК, определяемая соотношением

$$C^* = \sup_{n\{p(\bar{x})\}} \frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n), \tag{32}$$

и верхняя грань разыскивается по всем n и $p(x)$. Тогда, как это следует из (3), первое слагаемое равно $2^{-n\varepsilon/2}$ и стремится к 0 при возрастании n. Второе слагаемое определяется поведением $\Pr(V_\tau)$, которую можно представить:

$$\Pr(V_\tau) = 1 - \Pr(V_\tau) = \Pr\left(\frac{1}{n} F(\bar{x}; \bar{y}; \bar{m}) < C^* - \frac{\varepsilon}{2}\right) =$$
$$= \Pr\left\{\frac{1}{n} F(x; y; m) < \frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n) - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon}{2} + \left(C^* - \frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n)\right)\right\}. \tag{33}$$

Предположим, что при каждом n выбирается такое $p(x)$, при котором достигается максимум $\frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n)$. Тогда найдется n такое, что

$$C^* - \frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{34}$$

и

$$\Pr(\bar{V}_\tau) < \Pr\left(\frac{1}{n} F(\bar{x}; \bar{y}; \bar{m}) < \frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n) - \frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{35}$$

Для ШВК верхняя грань в (32) достигается при $n \to \infty$, поэтому (34) выполняется для больших n и вопрос о оценке вероятности ошибки сводится к исследованию правой части (35). Если вероятность того, что $\frac{1}{n} F(x; y; m)$ отличается от $\frac{1}{n} F(X^n; Y^n; M^n)$ на величину, большую чем $\frac{\varepsilon}{4}$, убывает с ростом n, тогда убывает с ростом n также и максимальная вероятность ошибки.

Заключение

Основные результаты статьи заключаются в строгом доказательстве теоремы о максимальной вероятности ошибки кода в ДШВК, которая утверждает о существовании кода, слова которого принадлежат $S \subset X^n$ и максимальная вероятность ошибки ограничивается выражением (3). Рассмотренная возможность применения теоремы для доказательства прямой теоремы кодирования позволит в последующих исследованиях применить результаты доказанной теоремы и указанную выше возможность для доказательства прямой теоремы кодирования ШВК. Полученные результаты развивают известные исследования различных моделей широковещательных каналов [4–13]. Цель дальнейшего исследования состоит в том, чтобы показать, что существуют коды с произвольно малой вероятностью ошибки при условии, что скорость кода не превосходит информационную емкость ШВК. Вместе с обратной теоремой кодирования [3] это является доказательством того, что информационная емкость и пропускная способность [1, 2] совпадают посредством изложения доказательства второй фундаментальной теоремы – прямой теоремы кодирования исследуемого канала.

Литература

1. Синюк, А. Д. Исследование совместной информации / А.Д. Синюк, О.А. Остроумов // Информация и Космос. – 2017. – № 3. – С. 55–58.

2. Синюк, А. Д. Формирование трехстороннего шифр-ключа по открытым каналам связи с ошибками: монография / А.Д. Синюк. – СПб.: Военная Академия связи, 2009. – 360 с.

3. Синюк, А. Д. Обратная теорема кодирования дискретного широковещательного канала связи / А.Д. Синюк, О.А. Остроумов // Информация и Космос. – 2018. – № 3. – С. 49–54.

4. Bergmans, P. Random coding theorems for Broadcast channels with degraded components / P. Bergmans // IEEE–IT 19, 1973. – P. 197–207.

5. Nair, Ch. The capacity region of a class of three-receiver Broadcast channels with degraded message sets / Chandra Nair, Abbas El Gamal // IEEE Transactions on Information Theory (TIT) 55(10), 2009. – P. 4479 – 4493.

6. Dikstein, L. On State-Dependent Degraded Broadcast Channels With Cooperation / L. Dikstein, H. H. Permuter, Y Steinberg // IEEE Transactions on Information Theory 62(5), 2016. – P. 2308–2323.

7. Chong, H.-F. On the Capacity Region of the Parallel Degraded Broadcast Channel With Three Receivers and Three-Degraded Message Sets / Hon-Fah Chong, Ying-Chang Liang // IEEE Transactions on Information Theory 64 (7), 2018. – P. 5017–5041.

8. Liang, Y. Rate Regions for Relay Broadcast Channels / Yingbin Liang, Gerhard Kramer // IEEE Transactions on Information Theory (TIT) 53(10), 2007. – P. 3517–3535.

9. Dai, B. Relay Broadcast Channel With Confidential Messages / Bin Dai, Linman Yu, Zheng Ma // IEEE Transactions on Information Forensics and Security 11(2), 2016. – P. 410–425.

10. Yu, W. Sum Capacity of Gaussian Vector Broadcast Channels / Wei Yu, John M. Cioffi // IEEE Transactions on Information Theory (TIT) 50(9), 2004. – P. 1875–1892.

11. Gohary, R. The Capacity Region of a Product of Two Unmatched Physically Degraded Gaussian Broadcast Channels With Three Individual Messages and a Common Message / Ramy H. Gohary, Timothy N. Davidson // IEEE Transactions on Information Theory (TIT) 59(1), 2013. – P. 76–103.

12. Mansour, A. On the Individual Secrecy Capacity Regions of the General, Degraded, and Gaussian Multi-Receiver Wiretap Broadcast Channel / Ahmed S. Mansour, Rafael F. Schaefer, Holger Boche // IEEE Transactions on Information Forensics and Security 11(9), 2016. – P. 2107–2122.

13. Chong, H.-F. The Capacity Region of the Class of Three-Receiver Gaussian MIMO Multilevel Broadcast Channels With Two-Degraded Message Sets / Hon-Fah Chong, Ying-Chang Liang // IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60 (1). – P. 42–53.

14. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. – М.: Дашков и К, 2016. – 472 с.

15. Буре, В. М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / В.М. Буре, Е.М. Парилина. – СПб.: Лань, 2013. – 416 с.

16. Биккенин, Р. Р. Теория электрической связи / Р.Р. Биккенин, М.Н. Чесноков. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 329 с.

17. Санников, В. Г. Теория информации и кодирования: Учебное пособие / В.Г. Санников. – М.: Изд-во МТУСИ, 2015. – 96 с.

18. Белов, В. М. Теория информации. Курс лекций / В.М. Белов, С.Н. Новиков, О.И. Солонская. – М.: РиС, 2016. – 143 с.

19. Колесник, В. Д. Курс теории информации / В.Д Колесник, Г.Ш. Полтырев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 416 с.

20. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр; пер. с англ. под ред. А.В. Назаренко. – Изд. 2-е, испр. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.

21. Гусак, А. А. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 204 с