Линейная сплайн-интерполяция в задаче обнаружения сигналов

Line spline interpolation in the problem of signals detection

Бутырский / Butyrsky E.
Евгений Юрьевич
(evegnira88@mail.ru)
доктор физико-математических наук, профессор.
Военно-морской институт радиоэлектроники им. А. С. Попова ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр ВМФ «Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н. Г. Кузнецова» (ВМА им. Н. Г. Кузнецова) МО РФ, профессор кафедры.
г. Санкт-Петербург

Васильев / Vasiliev V.
Валерий Васильевич
(vasiliev.valeron2016@yandex.ru)
Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ ВМА им. Н. Г. Кузнецова,
адъюнкт.
г. Санкт-Петербург

Понкратова / Ponkratova K.
Ксения Ивановна
(jessy_magg@mail.ru)
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
аспирант.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: функция – function; аппроксимация – approximation; сплайн – spline; динамическая система – dynamic system; сигнал – signal; процесс – process; алгоритм – algorithm, матрица – matrix; фильтрация – filtering.

В статье рассмотрена задача оценивания состояния нелинейной динамической системы, основанная на линейной сплайн-интерполяции функций. Приведены примеры применения в задачах фильтрации и обнаружения сигналов и анализ компьютерного моделирования. Для многомерных систем получены модели динамических систем и алгоритмы обработки в виде векторно-матричных уравнений.

The estimation problem of a status of non-linear dynamic system based on the line spline interpolation of functions is considered in article. Examples of application in problems of filtering and detection of signals and the computer simulation analysis are given. For multivariate systems, models of dynamic systems and algorithms of processing in the form of the vector-matrix equations are received.

Введение

Существует множество методов решения задачи оптимальной фильтрации для нелинейных систем, основанных на различных методах аппроксимации апостериорной плотности вероятности (АПВ). Обычно задача нахождения АПВ сводится к нахождению вероятностных характеристик апостериорного распределения (методы моментов, квазимоментов, спектральные моды), также сюда относятся численные методы решения, конечно-разностные и конечно-элементные методы, эллипсоидальная аппроксимация апостериорного распределения; замена оценки функции на функцию оценки; замена среднего по множеству средним по времени. Другие методы характеризуются упрощением исходных математических моделей с помощью линеаризации или представления функций, что позволяет использовать обобщенный фильтр Калмана, субоптимальные фильтры Стратоновича, Пугачева и др. [1–3].

Перечисленные выше методы дают принципиальную возможность получить приближение к оптимальной оценке с любой степенью точности, но требуют значительных вычислительных затрат. Однако в ряде случаев, когда АПВ существенно отличается от нормальной и при возникновении больших ошибок фильтрации, требуются более точные приближения. С этой точки зрения особенно привлекательными являются аппроксимации, основанные на сплайновых представлениях, так как при их применении никаких допущений по поводу законов распределений не делается, поэтому в данной статье будет рассматриваться метод, основанный на сплайновых представлениях. В этом случае задача фильтрации решается за счет того, что нелинейная функция представляется через линейные сплайны, что дает возможность проводить линейную обработку на каждом интервале и представлять нелинейный алгоритм как композицию линейных фильтров Калмана-Бьюси.

Сплайны в математике известны давно, в конце XIX века английские инженеры так называли гибкую линейку, которую применяли для проектирования закруглений железных дорог. Математика получила этот термин благодаря работам Шонберга в 1946 г., который назвал так рассмотренные им функции с «кусочными» свойствами. Сплайн В. С. Рябенького был первым интерполяционным минимальным сплайном. К настоящему времени имеется большая серия статей и ряд монографий, освещающих многие стороны теоретических исследований и широкого практического применения различных сплайнов [5, 6].

Существует большое количество разнообразных пространств сплайнов с различными полезными свойствами: гладкостью, качественной аппроксимацией, численной устойчивостью, неотрицательностью базисных функций, минимальной кратностью накрытия носителями функций базиса при заданном порядке аппроксимации. Некоторые пространства сплайнов обладают интерполяционным локальным базисом, определенными фильтрационными свойствами. Выбор пространства сплайнов обычно определяется типом данных и целями, которые ставятся при их обработке.

Первая цель – улучшение качества приближения: при одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше, чем абсолютные погрешности аппроксимации многочленами, а при одинаковых погрешностях уменьшается объем вычислений. Сплайны позволяют избежать осцилляций. Для сходимости аппроксимации к аппроксимируемой функции предъявляются более слабые требования, чем в случае многочленов. Например, интерполяция сплайнами невысоких степеней сходится даже для непрерывных функций.

Вторая цель – резкое уменьшение вычислительных трудностей как при построении алгоритмов решения задач, так и при дальнейшей работе с аппроксимантами, которые на каждом звене представляют собой многочлены невысоких степеней или иные элементарные функции.

Достижение этих целей привело в настоящее время к образованию двух направлений в теории сплайнов: алгебраического и вариационного.

В первом случае сплайны трактуются как некоторые гладкие кусочно-многочленные функции с однородной структурой. Сюда относятся так называемые L-сплайны, составленные из решений однородного линейного дифференциального уравнения (где $Ls(x)=0$ (где L – дифференциальный оператор). Решение задач аппроксимации и изучение аппроксимативных свойств сплайнов при этом сводятся к исследованию линейных алгебраических систем. При вариационном подходе под сплайнами понимают элементы гильбертовых (или банаховых) пространств, минимизирующие определенные функционалы, а затем исследуются свойства этих решений. Преимуществом алгебраического подхода перед вариационным является простота изложения и большая близость к практическим потребностям современных методов обработки, ориентируемых на цифровые вычислительные средства. Известно [4, 5], что наиболее эффективными, с точки зрения интерполяции и аппроксимации, являются кубические сплайны и B-сплайны, которые широко используются в практических задачах. Но их применение в вопросах фильтрации и обнаружения не позволит вывести алгоритм обработки из рамок нелинейных процедур, так как кубический сплайн является совокупностью функций третьей степени, которые нелинейны. Поэтому в статье используются линейные сплайны, которые хотя и не удовлетворяют требованиям непрерывности первой и второй производной, но зато позволяют свести алгоритм нелинейной фильтрации к линейной.

Необходимо отметить, что сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации.

Сплайны обладают рядом интересных свойств:

- если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;
- сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа узлов;
- можно построить точные границы ошибок аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;
- достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики;
- использование сплайновых аппроксимаций позволяет ослабить «проклятие размерности».

Предлагаемый подход обладает большой общностью и позволяет решать сложные задачи нелинейной фильтрации-обнаружения с помощью линейных фильтров Калмана, структура которого скачкообразно меняется в зависимости от мгновенного значения оцениваемого процесса.

В настоящей статье предлагается метод фильтрации-обнаружения, основанный на аппроксимации стохастического уравнения помехи кусочно-линейными функциями (линейные сплайн-функции). Разработанные на этой основе алгоритмы обработки сигналов определяются как алгоритмы сплайн-фильтрации и сплайн-обнаружения.

Метод сплайн-фильтрации и обнаружение для скалярной системы

Алгоритм линейной сплайн-фильтрации на интервале можно представить как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера секции, к которой принадлежит текущая оценка процесса. Известно, что в задачах линейной фильтрации нет необходимости вычислять плотность вероятности, достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки [8–10].

Предположим, что задана стохастическая динамическая система (ДС) уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) + n_1(t), \\ z = x + n_0(t). \end{cases} \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

$n_0(t)$ и $n_1(t)$ белые гауссовские шумы математическое ожидание и корреляционные функции которых, определяются выражениями:

$$\langle n_0(t)\rangle = \langle n_1(t)\rangle = 0, \ \langle n_0(t)n_0(t-\tau)\rangle = N_0\delta(\tau), \\ \langle n_1(t)n_1(t-\tau)\rangle = N_1\delta(\tau)$$

Таким образом, первое уравнение описывает динамику состояния, а второе является уравнением наблюдения процесса.

Аппроксимируем функцию $f(.)$, входящую в уравнение состояния, на интервалах $[x_i, x_{i+1})$ кусочно-линейной функцией, определяющей сплайн первой степени S_1 класса C [2]:

$$S_1 = \begin{cases} a_1(x-x_1)+b_1, & x_1 \le x < x_2 \\ a_2(x-x_2)+b_2, & x_2 \le x < x_3 \\ a_i(x-x_i)+b_i, & x_i \le x < x_{i+1} \\ a_n(x-x_n)+b_n, & x_{n-1} \le x < x_n. \end{cases} \tag{2}$$

где: n – число интервалов аппроксимации.

Зададим линейный интерполяционный сплайн между узлами сетки:

$$S_1(x) = (1-u)f_i + uf_{i+1}, \quad u = \frac{(x-x_1)}{\Delta_i}, \\ \Delta_i = x_{i+1} - x_i.$$

Асимптотически наилучшее равномерное приближение сплайном первой степени $S_1(x)$ функции $f(x)$ определяется выражением

$$S_1 = (1-u)\left[f_i - \frac{1}{16}\max\left(\Delta_{i-1}^2, \Delta_i^2\right)f_i\right] + \\ + u\left[f_{i+1} - \frac{1}{16}\max\left(\Delta_i^2, \Delta_{i+1}^2\right)f_{i+1}\right]. \tag{3}$$

$x_i \le x < x_{i+1}$, $\Delta_{-1} = \Delta_N = 0$,. n – число интервалов аппроксимации.

Введём функции прямоугольного окна $h(.)$, которую определим следующим образом

$$h(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1 \ \text{если} \ x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 \ \text{если} \ x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ S_1 = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i)$$

С учетом последнего, стохастическое ДС (1), у которого коэффициент сноса $f(x)$ аппроксимирован кусочно-линейными функциями, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i) + n_1(t). \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет марковский процесс, статистические характеристики которого полностью определяются двумя одномерными распределениями: начальной и переходной плотностями вероятности. Аналитическое выражение для них можно найти, решая соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова [3].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})(a_i x + b_i)p\right] + \\ + \frac{N_0[\sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})a_i^2]}{4}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{5}$$

При начальных условиях $p = \delta(x - x_1)$ решением уравнения будет:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(t)}}\exp\left\{\frac{[x - m_x(t)]^2}{2R(t)}\right\},$$

$$x_0 = 0, \ \ m_x(0) = 0.$$

$$m_x(t) = x_0 \exp\left[t\sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})a_i\right].$$

$$R(t) = 0.25\,\mathrm{N}_0 \sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})a_i\left\{1 - \exp\left[2t\sum_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})a_i\right]\right\}.$$

Имитационное моделирование уравнения (5) показывает, что плотность вероятности имеет разрывы, которые являются следствием операции дифференцирования над функцией $h(x)$. Для удовлетворения требования непрерывности плотности вероятности применялась операция сглаживания высокочастотных (ВЧ) составляющих характеристической функции, путем замены ВЧ-отсчетов ($i > 6$) нулями.

Рассмотрим, как определяются значения коэффициентов a_i, b_i через узловые точки x_i и значения функции $f(x_i)$. Для их определения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x_{i-1}) = a_i x_{i-1} + b_i \\ f(x_i) = a_i x_i + b_i \end{cases}. \tag{6}$$

В результате получаем значения коэффициентов:

$$a_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; \quad b_i = \frac{f(x_i)x_i - f(x_{i-1})x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \tag{7}$$

Необходимо отметить, что аппроксимировать исходную функцию кусочно-линейной можно различными способами (к примеру, точки сопряжения отрезков прямых можно выбирать на самой функции или вне ее). С другой стороны, способ аппроксимации зависит от принятого критерия близости [5, 6].

Но для решения задачи линейной фильтрации в этом нет необходимости, так как выражение (4) позволяет на интервалах $[x_i, x_{i+1})$ рассматривать (1) как линейное стохастическое уравнение, вследствие чего алгоритм фильтрации для этого интервала представим как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера интервала Δ_i, к которому принадлежит текущая оценка процесса $x(t)$.

Так как в задачах линейной фильтрации не требуется вычислять плотность вероятности, а достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки, то можно после стандартной процедуры осреднения [3, 4, 8–10] записать уравнение оценки случайного процесса $x(t) \in \Delta_i$ задаваемого системой (1) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})\left(a_i\hat{x} + b_i\right) + \dfrac{R}{N_0}\left(z - \hat{x}\right), \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{N_1}{2} - 2\sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) a_i R - \dfrac{R^2}{N_0}. \end{cases} \qquad (8)$$

Учитывая, что на уровне математических моделей система и сигнал неразличимы, уравнения (8) могут быть использованы и при решении задач фильтрации и обнаружения сигналов [7–10].

Для стационарного режима, когда производная дисперсии на интервале $x \in \Delta_i$ равна нулю, можно записать соотношение:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{N_0^2 a_i^2 + N_0 N_1} - N_0 a_i = Const\,, \quad x \in \Delta_i\,. \qquad (9)$$

Если рассматривать весь интервал изменения $x \in X$, то дисперсия фильтрации случайного процесса $x(t)$будет представляться вектором $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n)$. Таким образом, имеет место соответствие: $\{\Delta_i\} \to \{\hat{\sigma}_i^2\}$ и система уравнений (8) представляется уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} == \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1})(a_i\hat{x} + b_i) + \dfrac{2\hat{\sigma}_x^2}{N_0}(u - \hat{x}) \\ \hat{\sigma}_x^2 = 0.5\sqrt{N_0^2 \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) a_i + N_0 N_1} + 0.5 N_0 \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) a_i \end{cases} \qquad (10)$$

Из выражения (10) следует, что в стационарном режиме дисперсия фильтрации, постоянна на интервалах Δ_i, и меняется при переходе к другому интервалу ступенчатым образом. При этом необходимо отметить, что на каждом интервале реализуется линейный фильтр Калмана-Бьюси. При этом дисперсия фильтрации является функцией только оценки $\hat{\sigma}_x^2(\hat{x})$. Важным фактором с вычислительной точки зрения является то, что стационарные коэффициенты усиления $[N_0/2]\sigma_i^2$ могут быть рассчитаны априори и представляться в виде вектора чисел. Поэтому реализация метода фильтрации со стационарными коэффициентами требует значительно меньших объемов памяти и вычислительных затрат. Но с другой стороны, учитывая, что современная элементная база вычислительной техники непрерывно развивается, а объемы памяти возрастают, предварительный расчет и запоминание вектора функций $[N_0/2]\sigma_i^2(t)$ не представляет собой принципиальных сложностей.

Работа алгоритма фильтрации помехи заключается в следующем.

1. С учетом начальных значений $\hat{x}(0)$ и $\hat{\sigma}_x(0)$ и первого уравнения системы (10) находится значение оценки помехи $\hat{x}(1)$.

2. Значение оценки $\hat{x}(1)$ соотносится с системой интервалов $\{\Delta_i\}$. В результате определяются величины коэффициентов $a_i(1)$, $b_i(1)$ и дисперсия $\hat{\sigma}_i^2(1)$, которые используются для определения следующей оценки $\hat{x}(2)$.

3. С приходом отсчета реализации u_1 на основании системы уравнений (10) вычисляется следующая оценка помехи $\hat{x}(2)$.

4. Полученное значение $\hat{x}(2)$ соотносится с множеством интервалов $\{\Delta_i\}$ и снова определяется тройка $\{a_i, b_i, \hat{\sigma}_i^2\}$.

5. С учетом полученных значений коэффициентов $a_i(2)$, $b_i(2)$, дисперсии $\hat{\sigma}_i^2(2)$ и системы (10) находится следующее значение оценки помехи $\hat{x}(3)$.

6. Повторяются процедуры 2–5.

Так как линейное СДУ определяет гауссовскую плотность вероятности, то аппроксимация нелинейного СДУ линейным сплайном приводит к тому, что апостериорная плотность вероятности представляется в виде сплайна, «склеенного» из кусков нормальных плотностей вероятности при различных математических ожиданиях и дисперсиях (определяемых коэффициентами a_i, b_i). Так как коэффициенты $(a_i,\ b_i)$ в общем случае для положительных и отрицательных значениях $\hat{x}$ различны, то плотности вероятности могут иметь более двух моментов, не равными нулю (что имеет место для нормальной плотности вероятности).

Таким образом, в принципиальном плане метод сплайн-фильтрации основан на аппроксимации зависимости $f(x)$ сплайн-функцией $S_1(x)$, что позволяет использовать линейный фильтр Калмана, коэффициенты которого априори определяются значениями a_i, b_i, N_0 и N_1. Значения a_i и b_i могут быть рассчитаны заранее, исходя из вида зависимости $f(x)$ и необходимой точности аппроксимации (задача определения числа узлов интерполяции), так как уравнение Риккати, для коэффициента усиления фильтра Калмана, не содержит измеряемых данных.

Сплайн-фильтрация и обнаружение в случае многомерной системы

В работе [8] была предложен метод сплайн-фильтрации, основанный на представлении многомерной функции в виде линейной композиции одномерных функции на расширенном базисе аргументов. Такой подход обеспечивает независимость обработки по каждой компоненте, но требует значительного расширения числа аргументов. В настоящей статье предлагается подход, не требующий расширения базиса аргументов. Для многомерного случая $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$ стохастическую нелинейную ДС можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{n}_1(t),\\ \mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{n}_0(t).\end{cases} \qquad (11)$$

f(x)− известная функция своих аргументов.

$$\mathbf{n}_1=\left[n_{11}(t)\quad n_{12}(t)-n_{1m}(t)\right]^T,$$
$$\mathbf{n}_0=\left[n_{01}(t)\quad n_{02}(t)-\quad n_{0m}(t)\right]^T.$$

Корреляционные функции формирующего $\mathbf{n}_1(t)$ и наблюдаемого шумов $\mathbf{n}_0(t)$ задаются выражениями:

$$\left\langle \mathbf{n}_1(t)\right\rangle=\left\langle \mathbf{n}_0(t)\right\rangle=0,\left\langle \mathbf{n}_1(t)\mathbf{n}_1^T(t-\tau)\right\rangle=\mathbf{N}_1\delta(\tau),$$
$$\left\langle \mathbf{n}_0(t)\mathbf{n}_0^T(t-\tau)\right\rangle=\mathbf{N}_0\delta(\tau).$$

$\mathbf{N}_0,\mathbf{N}_1$ − симметричные матрицы двусторонних спектральных плотностей шума наблюдения и формирования размера $(m\times m)$

$$\mathbf{N}_0=\begin{bmatrix}N_{01}&0&...&0\\0&N_{02}&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&N_{0m}\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}_1=\begin{bmatrix}N_{11}&0&...&0\\0&N_{12}&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&N_{1m}\end{bmatrix}.$$

Аппроксимируем систему (11) линейными сплайнами. Сначала рассмотрим более простой случай, когда каждое уравнение содержит только одну переменную. Для этого уравнение (4) развернем до системы уравнений, где каждое из уравнений будет связано только с одной из переменных:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}h_{1,i}(x_{1,i},x_{1,i+1})(a_{1,i}x_1+b_{1,i})+n_1(t)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}h_{2,i}(x_{2,i},x_{2,i+1})(a_{2,i}x_2+b_{2,i})+n_2(t)\\ ----------------------\\ \dfrac{dx_m}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}h_{m,i}(x_{m,i},x_{m,i+1})(a_{m,i}x_m+b_{m,i})+n_m(t)\end{cases}. \qquad (12)$$

Представим последнюю систему в векторно-матричном виде:

$$\sum_{i=1}^{n}h_{j,i}(x_{j,i},x_{j,i+1})a_{j,i}x_j=$$
$$=h_{j,1}a_{j,1}x_1+h_{j,2}a_{j,2}x_1+...+h_{j,1}a_{j,n}x_1.$$

$$\begin{bmatrix}h_{1,1}a_{1,1}&h_{1,2}a_{1,2}&---&h_{1,n}a_{1,n}\\h_{2,1}a_{2,1}&h_{2,2}a_{2,2}&---&h_{2,n}a_{2,n}\\---&---&---&---\\h_{m,1}a_{m,1}&h_{m,2}a_{m,2}&---&h_{m,n}a_{m,n}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\--\\x_m\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}h_{1,1}a_{1,1}&h_{2,1}a_{2,1}&---&h_{m,1}a_{m,1}\\h_{1,2}a_{1,2}&h_{2,2}a_{2,2}&---&h_{m,2}a_{m,2}\\---&---&---&---\\h_{1,n}a_{1,n}&h_{2,n}a_{2,n}&---&h_{m,n}a_{m,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\--\\x_m\end{bmatrix}.$$

$$\cdot\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}h_{1,1}a_{1,1}&h_{2,1}a_{2,1}&---&h_{m,1}a_{m,1}\\h_{1,2}a_{1,2}&h_{2,2}a_{2,2}&---&h_{m,2}a_{m,2}\\---&---&---&---\\h_{1,n}a_{1,n}&h_{2,n}a_{2,n}&---&h_{m,n}a_{m,n}\end{bmatrix}.$$

$$\cdot\,\mathbf{Ax}=\left\{h_{i,j}a_{j,i}\right\}_{n\times m}\cdot\left\{x_j\right\}_{m\times 1}. \qquad (13)$$

Аналогично получим для свободного члена:

$$B_j=\sum_{i=1}^{n}h_{j,i}(x_i,x_{i+1})b_{j,i}$$

$$B_j=h_{j,1}b_{j,1}+h_{j,2}b_{j,2}+...+h_{j,n}b_{j,n}=$$
$$=\left[h_{j,1}h_{j,2}\ ...\ h_{j,n}\right]\begin{bmatrix}b_{j,1}\\b_{j,2}\\...\\b_{j,n}\end{bmatrix}=\mathbf{h}_j\mathbf{b}_j^T.$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}h_{1,1}b_{1.1}+h_{1,2}b_{1.2}+...+h_{1,n}b_{1.n}\\h_{2,1}b_{2.1}+h_{2,1}b_{2.1}+...+h_{2,n}b_{2.n}\\ ....\\h_{m,1}b_{m.1}+h_{m,2}b_{m.2}+...+h_{m,n}b_{m.n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\....\\B_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1\mathbf{b}_1^T\\\mathbf{h}_2\mathbf{b}_2^T\\......\\\mathbf{h}_m\mathbf{b}_m^T\end{bmatrix}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{h}_j=\left[h_{j,1}\quad h_{j,2}\quad --\quad h_{j,n}\right],$$
$$\mathbf{b}_j=\left[b_{j,1}\quad b_{j,2}\quad --\quad b_{j,n}\right]$$

$$\mathbf{N}_0=\begin{bmatrix}N_{01}&0&...&0\\0&N_{02}&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&N_{0m}\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}_1=\begin{bmatrix}N_{11}&0&...&0\\0&N_{12}&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&N_{1m}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, динамическую систему (11) в векторно-матричной форме, можно представить следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} + \mathbf{n}_1, \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{n}_0. \end{cases} \tag{15}$$

Уравнение оценивания состояния ДС для (15) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} + \mathbf{K}\left(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}\right), \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}, \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N_1} - \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T. \end{cases} \tag{16}$$

$\mathbf{A}$ – диагональная матрица $(m \times m)$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{z}$ – вектор-столбцы $(m \times 1)$; $\mathbf{K}$– матричный коэффициент усиления $(m \times m)$; $\mathbf{R}$ – корреляционная матрица ошибок фильтрации $(m \times m)$.

Для задачи фильтрация-обнаружение сигналов динамическая система соответствует нелинейному стохастическому уравнению, которое описывает помеху $\mathbf{x}$, а уравнение наблюдения имеет вид [9–10]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) + \mathbf{n}_1\left(t\right) \\ \mathbf{z}(t) = \theta\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_0(t), \quad \theta = 0,1. \end{cases} \tag{17}$$

Система уравнений моделирующих обработку сигнала, при условии нелинейности уравнения состояния и аппроксимации нелинейности линейными сплайнами, может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_+}{dt} = -(\mathbf{A} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}_+ + \mathbf{K}(2\mathbf{z} - \mathbf{s}) \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} + \mathbf{K}\left(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}\right), \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N_1} - \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dfrac{dL}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{s} + \hat{\mathbf{x}}_-)(2\mathbf{z} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{x}}_+) + \mathbf{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{s}^T \end{cases} . \tag{18}$$

$\hat{\mathbf{x}}_+ = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_- = \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_0$; $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_0$ – оценка помехи, соответственно при наличии сигнала и его отсутствии; L отношение правдоподобия.

Рассмотрим общий случай, когда каждое ДУ будет содержать не одну, а все переменные, т.е. когда изменение состояния одной переменной зависит от состояния нескольких (или всех) переменных $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$.Тогда функция окна будет зависеть не только от i и j (где i – номер интервала, на котором проводится линейная сплайн-интерполяция, $i = \overline{1,\ n}$; j – индекс переменной $j = \overline{1,\ m}$), но еще от k – индекса определяющего секции на каждой из переменных, и индекса l, определяющего коэффициенты на каждой из секций. В скалярном случае один индекс, когда в каждом уравнении по одной переменной, два индекса, когда в каждом уравнении все переменные, то $2 \times 2 = 4$ индекса.

Введем следующие обозначения:

$$h_{1,i}^{kl}\left(x_{1,i}, x_{1,i+1}\right) = h_{1i}^{kl},\ a_{1,i} = a_{1i}^{kl},\ b_{1,i} = b_{1i}^{kl}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{11}\left(a_{1i}^{11}x_1 + b_{1i}^{11}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{12}\left(a_{1i}^{12}x_2 + b_{1i}^{12}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{1m}\left(a_{1i}^{1m}x_m + b_{1i}^{1m}\right) + n_1\left(t\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{21}\left(a_{2i}^{21}x_1 + b_{1i}^{21}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{22}\left(a_{2i}^{12}x_2 + b_{2i}^{12}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{2m}\left(a_{mi}^{2m}x_m + b_{1i}^{2m}\right) + \ldots + n_2\left(t\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{m1}\left(a_{1i}^{m1}x_1 + b_{1i}^{m1}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{m2}\left(a_{mi}^{m2}x_2 + b_{mi}^{m2}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{mm}\left(a_{mi}^{mm}x_m + b_{1i}^{mm}\right) + \ldots + n_m\left(t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{11}a_{1i}^{11}x_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{12}a_{1i}^{12}x_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{1m}a_{1i}^{1m}x_m + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{1k}b_{1i}^{1k} + n_1\left(t\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{21}a_{2i}^{21}x_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{22}a_{2i}^{22}x_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{2m}a_{2i}^{2m}x_m + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{2k}b_{2i}^{2k} + n_2\left(t\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{m1}a_{mi}^{m1}x_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{m2}a_{mi}^{m2}x_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{mm}a_{mi}^{mm}x_m + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{2k}b_{mi}^{2k} + n_m\left(t\right) \end{cases} .$$

Суммируя слагаемые в правой части последней системы, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{1k}a_{1i}^{1k}x_k + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{1i}^{1k}b_{1i}^{1k} + n_1\left(t\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{2k}a_{2i}^{2k}x_k + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{2i}^{2k}b_{2i}^{2k} + n_2\left(t\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{mk}a_{mi}^{mk}x_k + \sum\limits_{k}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{mi}^{mk}b_{mi}^{mk} + n_m\left(t\right) \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_{11}^{1} = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{11}a_{1i}^{11},\ \ \mathbf{A}_{12}^{1} = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{12}a_{1i}^{12},\ \ \ldots,\ \mathbf{A}_{1m}^{1} = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{1m}a_{1i}^{1m} \\ \mathbf{A}_{21}^{2} = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{21}a_{2i}^{21},\ \mathbf{A}_{22}^{2} = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{22}a_{2i}^{22},\ \ldots,\ \mathbf{A}_{2m}^{2} = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{2m}a_{2i}^{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}_{m1}^{m} = \sum_{i=1}^{n} h_{mi}^{m1}a_{mi}^{m1},\ \mathbf{A}_{m2}^{m} = \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{m2}a_{mi}^{m2},\ \ldots,\ \mathbf{A}_{1m}^{m} = \sum_{i=1}^{n} h_{mi}^{mm}a_{mi}^{mm} \end{gathered} \tag{19}$$

$$\mathbf{B}_1=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}h_{2i}^{2k}b_{2i}^{2k},\ \mathbf{B}_2=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}h_{2i}^{2k}b_{2i}^{2k},\ \ldots..,\mathbf{B}_m=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}h_{mi}^{mk}b_{mi}^{mk} \tag{20}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^1 & \mathbf{A}_{12}^1 & \ldots.. & \mathbf{A}_{1m}^1\\ \mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{A}_{22}^2 & \ldots.. & \mathbf{A}_{2m}^2\\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots..\\ \mathbf{A}_{m1}^m & \mathbf{A}_{m2}^m & \ldots.. & \mathbf{A}_{mm}^m\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\\ \ldots\\ \mathbf{B}_m\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^1 & \mathbf{A}_{12}^1 & \ldots.. & \mathbf{A}_{1m}^1\\ \mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{A}_{22}^2 & \ldots.. & \mathbf{A}_{2m}^2\\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots..\\ \mathbf{A}_{m1}^m & \mathbf{A}_{m2}^m & \ldots.. & \mathbf{A}_{mm}^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_m\end{bmatrix}$$

С учетом, введенных обозначений систему (18) можно записать в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{B}+\mathbf{n}_1(t)\\ \mathbf{z}=\theta\mathbf{s}(t)+\mathbf{x}(t)+\mathbf{n}_0(t)\end{cases}.$$

Векторно-матричная модель фильтрации-обнаружения может быть записана в виде (12), но при этом матрицы **A**, **B** вычисляются по формулам (19–20), а не по (13) и (14).

Выводы

1. Аппроксимация стохастической нелинейной динамической системы в виде линейных сплайнов является глобальной аппроксимацией, позволяющей сохранить все особенности присущие ей.

2. На каждом линейном участке система обработки может быть представлена в виде линейного фильтра Калмана-Бьюси. При этом будут соблюдаться все условия его применимости, а именно, модель шума в виде гауссовского процесса и линейность самой системы относительно ее состояния.

3. В целом система обработки представляется в виде композиции фильтров Калмана-Бьюси, имеющими характеристики, согласованные с моделью системы на каждом из интервалов сплайнового представления.

4. Плотность вероятности оцениваемого процесса представляется в виде сочленения различных гауссовских распределений, каждое из которых соответствует своему интервалу.

5. Компьютерное моделирование подтверждает теоретические выводы, что аппроксимация линейными сплайнами позволяет достичь выходного эффекта сколь угодно близкого к точной модели системы.

6. Предложенный подход может быть применен в задачах обнаружения и фильтрации сигналов в условиях помех и шумов с различными законами распределений.

Литература

1. Рыбаков, К. А. Решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации как задача анализа систем со случайными обрывами и ветвлениями траекторий / К.А. Рыбаков // Материалы конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: актуальные проблемы». – Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2012. – С. 38–42.

2. Крассовский, А. А. Справочник по теории автоматического управления / А.А. Красовский. – М.: Наука, 1987. – 711 с.

3. Тихонов, В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

4. Казаков, В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи / В.А. Казаков. – М.: Сов. радио, 1973. – 232 с.

5. Бурова, И. Г. Теория минимальных сплайнов / И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович. – СПб.: СПбГУ, 2001. – 315 с.

6. Завьялов, Ю. С. Метод сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.Н. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

7. Розов, А. К. Нелинейная фильтрация сигналов / А.К. Розов. – СПб.: Политехника, 1994. – 381 с.

8. Бутырский, Е. Ю. Основы сплайн-фильтрации сигналов / Е.Ю. Бутырский // Информация и Космос. – 2010. – № 1. – С. 34–39.

9. Бутырский, Е. Ю. Обнаружение сигналов на фоне марковской реверберационной помехи / Е.Ю. Бутырский // Научное приборостроение. – 2012. – Т. 22, № 1. – С. 87–95.

10. Бутырский, Е. Ю. Сплайн модели сигналов и сплайн фильтрация / / Е.Ю. Бутырский // Национальная безопасность и стратегическое планирование. – 2014.– № 2 (6). – С. 43–56.