# Оптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов вдоль линии визирования в орбитальной относительной системе координат

## Optimal control of the mutual maneuver of space vehicles along the line of sight in the orbital relative coordinate system

**Гончаревский / Goncharevsky V.**
Вилен Степанович
(vilenstepan@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: взаимный маневр – mutual maneuver; относительная система координат – relative coordinate system; линия визирования – line of sight; энергетические затраты – energy costs.

Статья посвящена отысканию энергетически оптимального управления взаимным маневром космических аппаратов при использовании методов движения вдоль линии визирования. В результате решения вариационной задачи Лагранжа с фиксированными концами получены оптимальные управляющие функции в замкнутой аналитической форме для одного из таких методов – метода орбитального параллельного сближения. Моделирование программ управления позволило сформулировать рекомендации по выбору направления и времени выполнения маневра.

The article is devoted to finding energetically optimal control of the mutual maneuver of space vehicles using the methods of motion along the line of sight. As a result of solving the variational Lagrange problem with fixed ends, optimal control functions have been obtained in closed analytical form for one of such methods – the method of orbital parallel approach. Control programs modeling has allowed to formulate recommendations on the choice of the direction and time of the maneuver.

Методы движения вдоль линии визирования (ЛВ) относятся к методам управления взаимным маневром (ВМ) космических аппаратов (КА), в которых на кинематику их относительного движения (ОД) накладываются определенные ограничения. Суть этих ограничений состоит в том, что программная траектория в относительной системе координат (ОСК) выбранного типа при любых значениях краевых условий и времени маневра должна представлять собой отрезок неподвижной прямой, проходящей через центры масс КА. Иными словами ОД должно происходить вдоль стабилизированной ЛВ, угловая скорость вращения которой в ОСК поддерживается равной нулю.

В зависимости от типа ОСК, в которой ведется управление ВМ, можно выделить три основных метода:

– движение вдоль ЛВ, стабилизированной в невращающейся ОСК;

– движение вдоль ЛВ, стабилизированной в орбитальной ОСК;

– движение вдоль ЛВ, стабилизированной в ОСК, вращающейся относительно орбитальной ОСК с угловой скоростью пассивного аппарата–цели (ПА-цели).

Если ВМ выполняется для обеспечения сближения КА, то эти методы получили название соответственно методов инерциального параллельного сближения (ИПС), орбитального параллельного сближения (ОПС) и сближения по радиолучу (СРЛ). В первом методе ЛВ стабилизирована в невращающейся ОСК, т.е. в процессе маневра должна быть равна нулю угловая скорость вращения ЛВ в инерциальном пространстве. Во втором методе равна нулю скорость вращения ЛВ относительно орбитальной ОСК. В третьем методе ЛВ стабилизируется в ОСК, вращающейся относительно орбитальной ОСК с угловой скоростью движения ПА-цели, т.е. активный аппарат (АА) в процессе маневра удерживается на ЛВ, соединяющей базовый ПА и ПА-цель, на которых начинается и заканчивается перемещение АА.

Введение рассмотренных ограничений превращает траекторию ОД в вынужденную, что увеличивает энер-

гетические затраты (ЭЗ) на выполнение маневра по сравнению с методами управления, в которых эти ограничения отсутствуют. Поэтому для методов движения вдоль ЛВ особенно актуальна проблема разработки энергетически оптимальных программ и алгоритмов управления ВМ.

Процесс осуществления ВМ при использовании методов движения вдоль ЛВ можно разделить на два следующих друг за другом этапа:

– обеспечение требуемого режима наведения;

– движение вдоль стабилизированной ЛВ.

Основное назначение первого этапа – сведение к нулю начальной угловой скорости вращения ЛВ в ОСК. Кроме того, на этот этап может быть возложено решение таких дополнительных задач как обеспечение требуемого углового положения ЛВ в ОСК, а также обеспечение требуемого значения скорости вдоль стабилизированной ЛВ. Решение этих задач позволяет получить требуемые начальные условия для второго этапа. Специфика задач, решаемых первым этапом, такова, что здесь нет необходимости накладывать какие-либо связи на кинематику ОД, поэтому для управления могут быть использованы методы без ограничений на вид траектории.

В процессе выполнения второго этапа осуществляется движение вдоль стабилизированной ЛВ, завершающееся созданием заданных конечных условий, которые необходимы для решения поставленной перед АА конкретной задачи.

Таким образом, проблема оптимизации управления ВМ при использовании методов движения вдоль ЛВ распадается на две взаимосвязанные задачи:

– отыскание оптимального управления при отсутствии ограничений на вид траектории, которое должно обеспечить требуемые конечные условия, являющиеся начальными условиями для второго этапа процесса управления;

– отыскание оптимального управления, когда на компоненты вектора положения на программной траектории наложены голономные условия связи, обеспечивающие прямолинейность этой траектории в ОСК.

Решение первой задачи изложено в [1]. В настоящей работе приведено решение второй задачи для случая непрерывного управления ВМ, являющегося основным при реализации методов движения вдоль ЛВ. При решении этой задачи примем следующие исходные условия:

– ПА обращается вокруг планеты по круговой орбите с угловой скоростью $\omega$. АА выведен на компланарную орбиту, близкую к орбите ПА;

– ВМ рассматривается в визирной ОСК *xy*, угловая скорость вращения которой относительно орбитальной

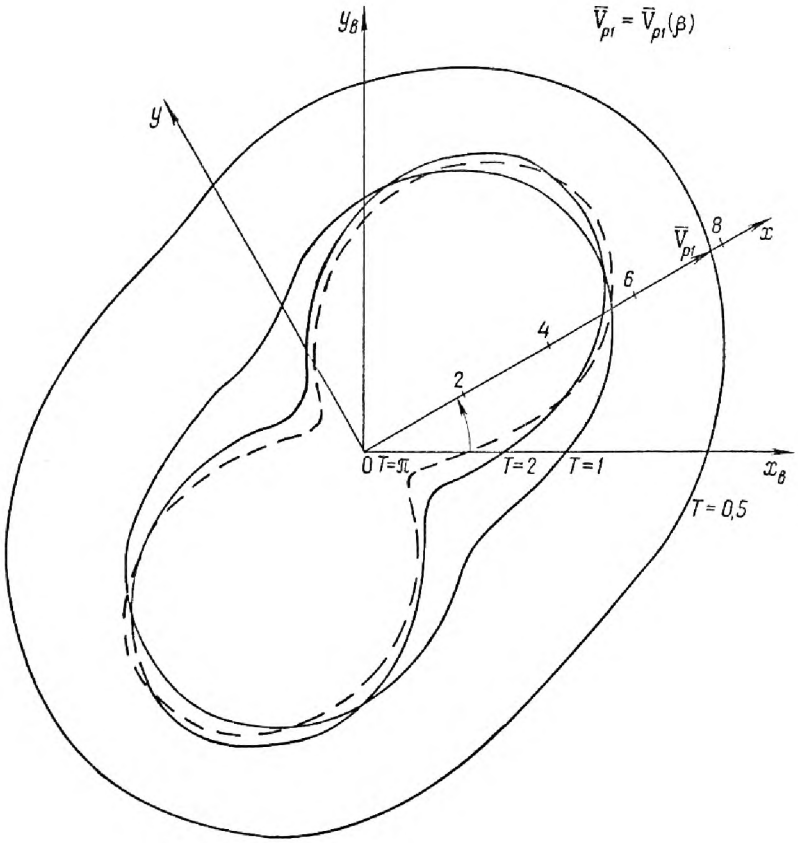


*Рис. 1*

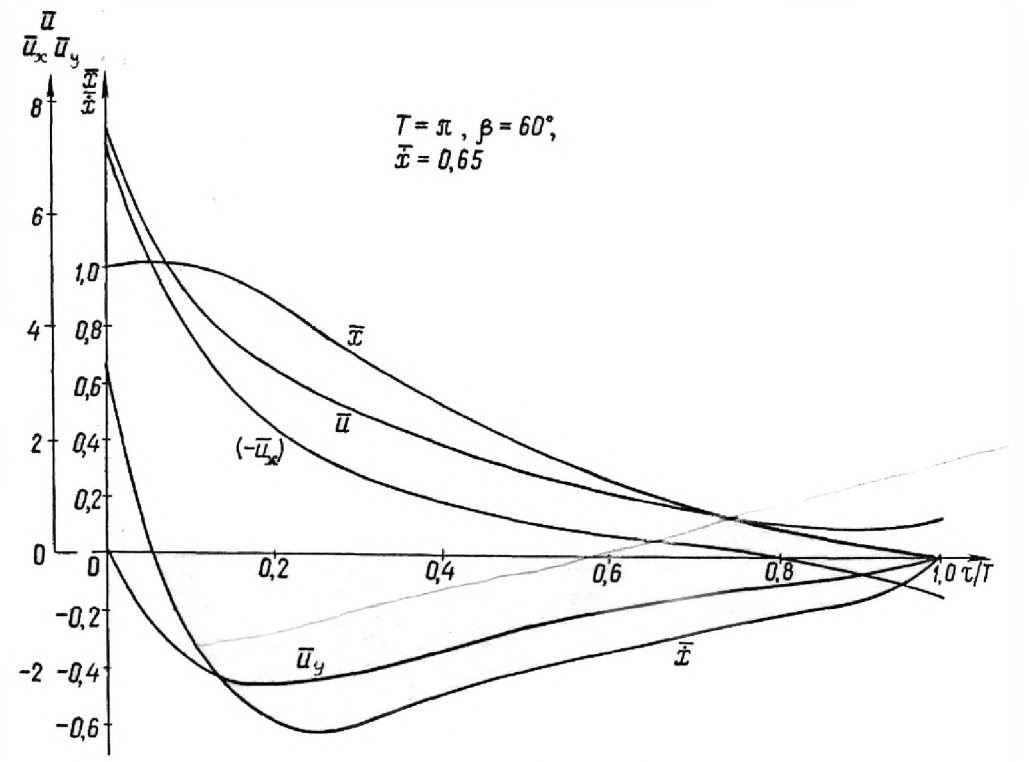
$T = \pi$, $\beta = 60°$,
$\bar{x} = 0,65$
$\bar{u}$
$\bar{u}_x$ $\bar{u}_y$
$\bar{\dot{x}}$
$(-\bar{u}_x)$
$\bar{u}_y$
$\tau/T$

*Рис. 2*

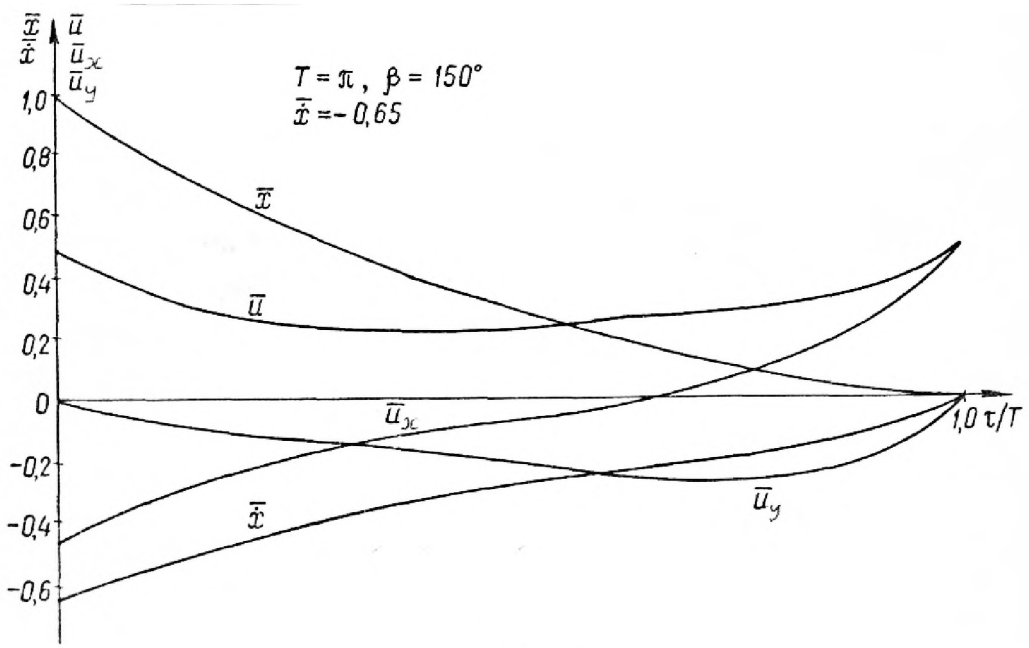
$T = \pi$, $\beta = 150°$
$\bar{x} = -0,65$
$\bar{x}$
$\bar{\dot{x}}$
$\bar{u}$
$\bar{u}_x$
$\bar{u}_y$
$\tau/T$

*Рис. 3*

ОСК равна нулю, что соответствует управлению по методу ОПС. Таким образом, на втором этапе АА движется вдоль ЛВ, стабилизированной в указанной ОСК;

– перед началом второго этапа ликвидируется начальная скорость поперечного ОД по нормали к ЛВ, а также устанавливается требуемое угловое положение ЛВ и требуемое значение скорости вдоль этой линии;

– задается время движения АА вдоль линии визирования $T$, а в качестве критерия оптимальности управления $\vec{u}$, обеспечивающего это движение, выбран минимум функционала, характеризующего ЭЗ на выполнение маневра

$$J=\int_0^T F d\tau, \text{ где } F=u^2=u_x^2+u_y^2; \tag{1}$$

– предполагается, что для осуществления маневра на АА установлена двигательная установка (ДУ) с тягой, регулируемой как по величине, так и по направлению. В процессе решения задачи ограничений на параметры ДУ, и, следовательно, на управляющие функции не накладывается. Такая постановка задачи позволяет воспользоваться для ее решения методами классического вариационного исчисления [2] и общей методикой, изложенной в работе [3].

Согласно этой методике структура оптимального управления при использовании метода ОПС может быть определена в результате решения вариационной задачи Лагранжа с фиксированными концами, которое можно получить, если удастся найти решение соответствующего уравнения Эйлера-Пуассона. В визирной ОСК с учетом голономных условий связи $y=\dot{y}=\ddot{y}=0$, накладываемых на кинематику ОД методом ОПС, это уравнение будет иметь вид

$$x^{IV}+l_{11}\ddot{x}+m_{11}\dot{x}+n_{11}x=0, \tag{2}$$

где

$$l_{11}=-2a_{11}-b_{12}^2,\ m_{11}=-2(\dot{a}_{11}+b_{12}\dot{b}_{12}),$$
$$n_{11}=a_{11}^2+a_{21}^2-\ddot{a}_{11}+d(a_{21}b_{12})/d\tau$$

коэффициенты, определяемые элементами $a_{11}, a_{21}, b_{12}$ матриц А и В динамической модели ВМ в этой ОСК, описываемой системой уравнений [3]

$$\ddot{x}-a_{11}x=u_x,$$
$$-a_{21}x+b_{12}\dot{x}=u_y. \tag{3}$$

В системе (3) элементы

$$a_{11}=3\sin^2\beta,\ \ a_{21}=3\sin\beta\cos\beta,\ \ b_{12}=2, \tag{4}$$

где $\beta$ – угол, характеризующий направление стабилизированной ЛВ относительно местной вертикали, являются постоянными величинами [3].

Следовательно, уравнение (2) будет представлять собой линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Поэтому его общее решение можно записать в виде

$$x_э(\tau)=\sum_{i=1}^{4}C_i\exp r_i\tau, \tag{5}$$

где $r_i$ – корни характеристического уравнения

$$r^4+l_{11}r^2+n_{11}=0. \tag{6}$$

Биквадратное уравнение (6) имеет сопряженные корни

$$r_1=\left|\sqrt{q_1}\right|,\quad r_2=\left|\sqrt{q_2}\right|,\quad r_3=-r_1,\quad r_4=-r_2,$$
$$q_1=-0{,}5l_{11}+\sqrt{0{,}25l_{11}^2-n_{11}},\quad q_2=-0{,}5l_{11}-\sqrt{0{,}25l_{11}^2-n_{11}}. \tag{7}$$

Произвольные постоянные $C_i$ определяются из краевых условий

$$x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0,$$
$$x(T)=x_k,\ \dot{x}(T)=\dot{x}_k. \tag{8}$$

Интегральная кривая (5) является экстремалью, доставляющей при краевых условиях (8) минимум функционалу (1), так как выполняется условие Клебша-Лежандра $F_{\ddot{x},\ddot{x}}=2>0$, где $F_{\ddot{x},\ddot{x}}$ – частная производная подынтегрального выражения функционала по параметру $\ddot{x}$. Экстремаль представляет собой оптимальный закон перемещения АА вдоль заданного направления ЛВ. Подставив этот закон в левые части уравнений (3), получим искомые оптимальные управления $u_{xэ}$, $u_{yэ}$, обеспечивающие решение поставленной задачи.

$$u_{xэ}=(r_1^2-a_{11})(C_1e^{r_1\tau}+C_3e^{-r_1\tau})+(r_2^2-a_{11})(C_2e^{r_2\tau}+C_4e^{-r_2\tau}),$$
$$u_{yэ}=C_1(2r_1-a_{21})e^{r_1\tau}+C_2(2r_2-a_{21})e^{r_2\tau}-C_3(2r_1+a_{21})e^{-r_1\tau}-C_4(2r_2+a_{21})e^{-r_2\tau},$$
$$r_1=\sqrt{a+b},\ r_2=\sqrt{a-b},\ a=a_{11}+b_{12},\ b=\sqrt{a_{11}+a_{21}^2+b_{12}^2}.$$

Управление $u_{xэ}$ обеспечивает перемещение АА вдоль ЛВ, а управление $u_{yэ}$ удерживает его на этом направлении. Если движение осуществляется вдоль местной горизонтали $(\beta=0)$, то уравнение (2) имеет особое решение

$$x_э(\tau)=C_1+C_2\tau+C_3e^{2\tau}+C_4e^{-2\tau},$$

а оптимальные управляющие функции

$$u_{xэ}=4(C_3e^{2\tau}+C_4e^{-2\tau}),\ u_{yэ}=2(C_2+C_3e^{2\tau}-2C_4e^{-2\tau}).$$

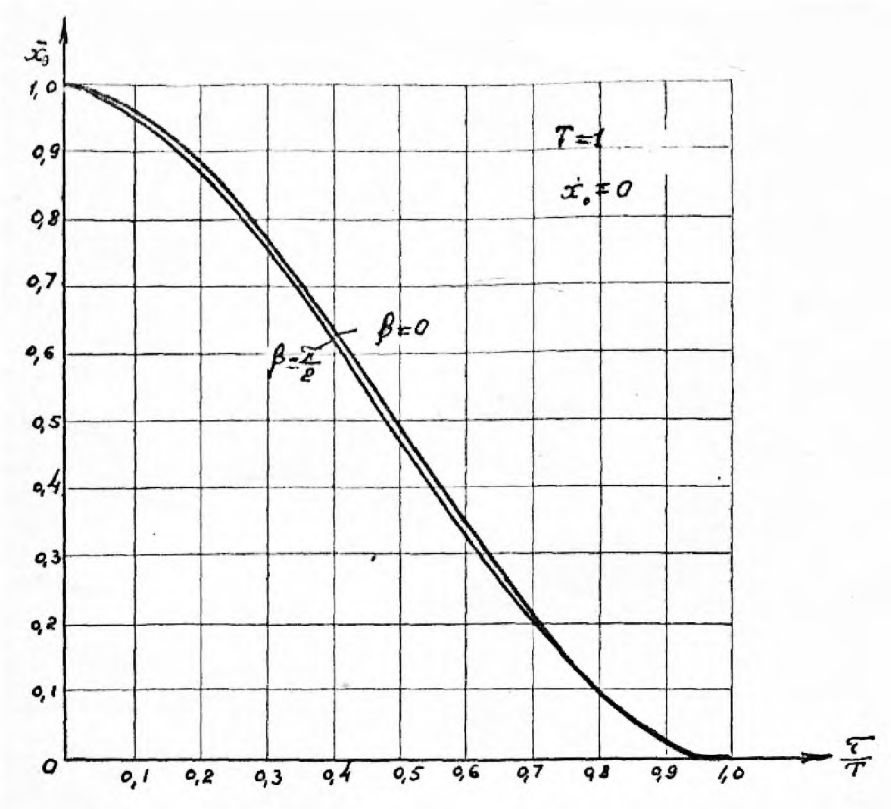
$\bar{x}_э$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
$\frac{\tau}{T}$
$T=1$
$\dot{x}_0=0$
$\beta=0$
$\beta=\frac{\pi}{2}$

*Рис. 4*

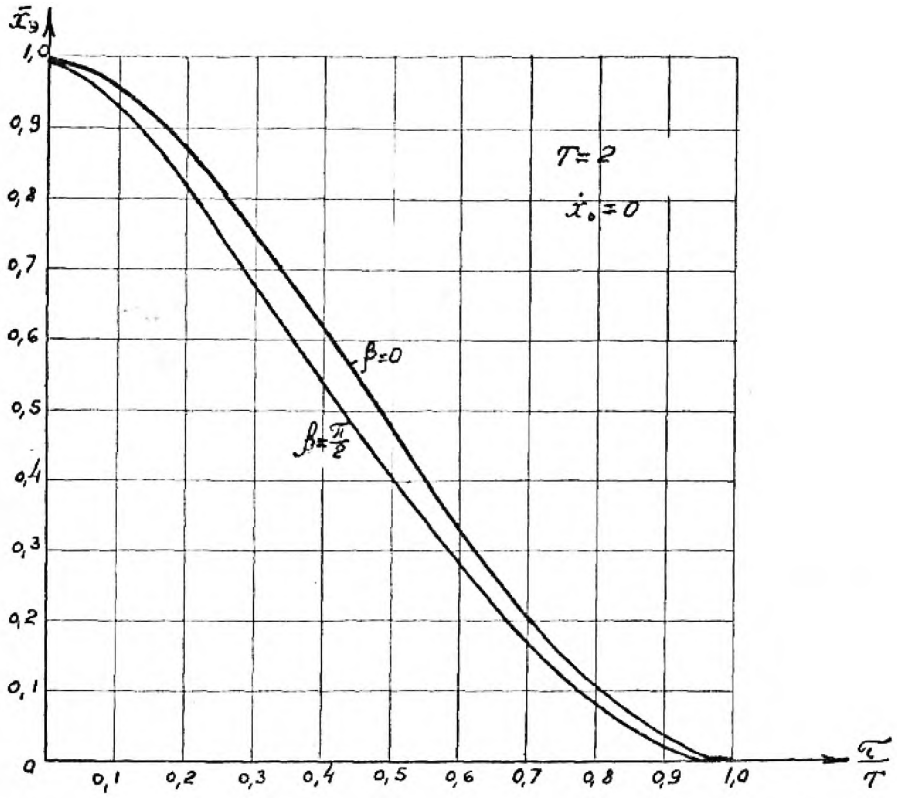
$\bar{x}_э$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
$\frac{\tau}{T}$
$T=2$
$\dot{x}_0=0$
$\beta=0$
$\beta=\frac{\pi}{2}$

*Рис. 5*

Из соотношений, определяющих оптимальное управление $\vec{u}$ видно, что оно зависит от краевых условий и времени выполнения ВМ. Для выяснения характера этой зависимости и определения, наиболее благоприятных с точки зрения ЭЗ, направления и времени маневра было проведено моделирование оптимальных программ, что позволило получить численные значения управления $\vec{u}_э$ и требуемой характеристической скорости $V_{p1} = \int_0^T |\vec{u}_э| d\tau$ для различных краевых условий и времени маневра. Некоторые результаты моделирования для случая сближения с мягким контактом при начальных орбитах аппаратов, близким к круговым, представлены на рис. 1...3 (здесь индекс « – » означает нормирование величины по начальной дальности $x_0$) и справедливы для любых начальных условий по дальности (в пределах принятых в работе допущений) и любых высот орбиты ПА. Для определения значения управления $u'_э$ и $V'_{p1}$ для конкретной орбиты, характеризующейся величиной $\omega$, и конкретного начального расстояния $x_0$, необходимо воспользоваться соотношениями $u' = \omega^2 u$, $V'_p = \omega V_p$, где $u = x_0 \bar{u}$, $V_p = x_0 \bar{V}_p$. На рис. 2...3 показан характер изменения составляющих оптимального управления $u_x$ и $u_y$, а также расстояния $\bar{x}$ и скорости $\dot{\bar{x}}$ в процессе маневра для $T = \pi$ и двух направлений ЛВ $\beta$=60° (направление с наибольшими ЭЗ) и $\beta$ =150° (направление с наименьшими ЭЗ). Зависимость $V_{p1}$ от направления сближения при различном времени $T$ иллюстрируется рис. 1. Видно, что при уменьшении $T$ значения $V_{p1}$ увеличиваются и становятся мало зависящими от направления сближения. С ростом $T$ эта зависимость усиливается. Это объясняется тем, что здесь маневр выполняется с малым уровнем тяги, сравнимым с разностным гравитационным ускорением, влияние которого зависит от относительного положения аппаратов. Видно также, что наиболее благоприятными направлениями с точки зрения ЭЗ при $T$>1 можно считать $\beta \approx 30^\circ$, $\beta \approx 150^\circ$. С этой точки зрения время маневра целесообразно задавать в пределах $1 \le T \le \pi$. При таком выборе $T$ получаются достаточно малые уровни требуемых $u_{max}$ и приемлемые значения ЭЗ на маневр и функционирование системы ориентации. Выбор больших значений $T$ не приводит к значительному уменьшению этих величин, а для ряда направлений, как это видно из рис. 1, наоборот дает некоторое их увеличение. Кроме того, с ростом $T$ будут увеличиваться ЭЗ в системе ориентации АА.

Результаты моделирования экстремали (5) для различных краевых условий и времени маневра показывают, что эта интегральная кривая в рассматриваемом интервале времени $T < \pi$ слабо зависит от направления сближения. Наглядным доказательством этого являются графики, построенные на рис.4...5 для случая компланарного сближения с мягким контактом. На этих рисунках изображены кривые для $\beta = 0$ и $\beta = 90^\circ$ (экстремали для остальных значений $\beta$ лежат между ними). Видно, что экстремали при $T$<2 практически совпадают и только при $T$>2 появляется ощутимая разница между ними. Следовательно, для небольших $T$ можно, по-видимому, использовать программы управления, которые получаются путем подстановки в правую часть уравнений для составляющих управления $\vec{u}$ экстремалей, не зависящих от направления сближения, что значительно упростит вид управления $\vec{u}$.

Одной из таких экстремалей является интегральная кривая

$$x(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^3 + C_4\tau^4, \qquad (9)$$

полученная для случая движения аппаратов в свободном пространстве [4]. Подстановка соотношения (9) в левую часть уравнений (3) дает квазиоптимальную программу управления

$$u_x = 2C_3 - a_{11}C_1 + (6C_4 - a_{11}C_2)\tau - a_{11}(C_3 + C_4\tau)\tau^2,$$

$$u_y = b_{12}C_2 - a_{21}C_1 + (2b_{12}C_3 - a_{21}C_2)\tau + [3b_{12}C_4 - a_{21}(C_3 + C_4\tau)]\tau^2.$$

Исключая из экстремали (9) и ее первой производной переменную, получим аналитическое выражение для фазовой траектории, определяющей закон управления вдоль ЛВ

$$x = (3 + \dot{\bar{x}}_0 T)^3 (2 \mp 3A^{1/2} \pm A^{3/2}) / (2 + \dot{\bar{x}}_0 T)^2, \qquad (10)$$

где $A = 1 + \dot{\bar{x}} 3T(2 + \dot{\bar{x}}_0 T)/(3 + \dot{\bar{x}}_0 T)^2$.

Если $\dot{\bar{x}}_0 = -2/T$, то уравнение (10) принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = k\sqrt{\bar{x}},$$

где $k = \dot{\bar{x}}_0$, т.е. из соотношения (10), как частный случай, вытекает хорошо известный квадратичный параметрический закон управления сближением КА вдоль ЛВ.

## Литература


1. Гончаревский, В. С. Оптимальное непрерывное управление взаимным маневром космических аппаратов без ограничений на вид траектории в орбитальной относительной системе координат / В.С. Гончаревский // Информация и Космос. – 2016. – № 1. – С. 143–147.

2. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

3. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – МО РФ, 1998. – 87 с.

4. Гончаревский, В. С. Оптимальные программы управления относительным движением космических аппаратов в свободном пространстве / В.С. Гончаревский // Информация и Космос. – 2012. – № 1. – С. 110–112.