Оптимальное в смысле заполнения квантование информации при наличии случайных ошибок в квантах

Optimal quantization of information in the sense of filling in the presence of random errors in quanta

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
действительный член МАИ.
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Ширямов / Shiryamov O.
Олег Анатольевич
(mood2@yandex.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: оптимальное квантование информации – optimal quantization of information; квант – quantum; оптимальная величина пробела между квантами – optimal value of the gap between quanta; случайные ошибки в кванте – random errors in the quantum.

Решается задача оптимального в смысле заполнения квантование информации при условии возникновения случайных ошибок в квантах и определения величины пробела между квантами для устранения этих ошибок.

The problem of the optimal quantization of information in the sense of filling is being solved under the condition of random errors in quanta and the determination of the gap between quanta to eliminate these errors.

Введение

В современных автоматизированных системах управления информация хранится, обрабатывается и передается в виде специальных дискретных единиц (бит, байт, пакет и т.д.). На более высоком уровне абстрагирования можно говорить о структурных порциях или квантах информации. Кванты информации объединяются в информационные массивы. При этом решение задач в сложных системах часто связано с различными факторами неопределенности, как внутренними, так и внешними. Таким образом, объемы массивов хранимой, обрабатываемой и передаваемой информации в общем случае являются случайными, и в адаптивных системах существует возможность выбора, в установленных техническими характеристиками пределах, размера квантов информации для выполнения системой определенных операций. Очевидно, что при этом возникает задача оптимального квантования информации по критерию минимума потерь.

Первые основополагающие результаты решения теории ценности информации с учётом стоимости были решены в статье [1], и оптимизируемая функция квантованной величины представлена в виде математического ожидания величины потерь:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty [x(E(z/x)+1) - z]df(z) + \\ + cJ + \text{const},\ J = \int_0^\infty E(z/x)dF(z). \quad (1)$$

Первое слагаемое – средние потери за счёт искажения значения случайной величины информации z в результате квантования, второе слагаемое – потери за счёт использования неполного количества информации J.

В работе [2] авторы, ссылаясь на работу [1], аналогичную функцию квантуемой величины представляют в виде:

$$\Psi(x) = (x+c)\int_0^\infty (E(z/x)+1)dF(z), \quad (2)$$

где x – величина кванта, c – величина промежутка между квантами, $E(\alpha)$ – целая часть числа α, $F(z)$ – функция распределения квантуемой случайной величины z, имеющей конечное математическое ожидание.

В статье [3] был предложен новый подход к квантованию случайной величины путем введением функции

распределения величины кванта, а не только его фиксированного значения.

Но во всех цитируемых работах предполагалось, что величина пробела между квантами c является фиксированной величиной и не зависит от кванта x. Но в процессе хранения, передачи и обработки квантованной случайной величины могут возникать ошибки, приводящие к искажению или потере информации. Эти ошибки могут быть обусловлены различными факторами. Для повышения достоверности квантованной информации необходимо при получении каждого кванта проводить его контроль на наличие ошибок, и при необходимости исправлять их. Однако на устранение требуются затраты времени. Таким образом, величина пробела может увеличиваться на время восстановления предшествующего кванта, что приводит к уменьшению реального количества квантов. Очевидно, что возникает задача выбора оптимальной величины пробела между квантами при условии наличия случайных ошибок в квантах и необходимого времени на их исправление.

Сущность метода и его формализация. Рассмотрим два возможных варианта возникновения ошибок в квантах. В первом случае появление ошибок в случайном процессе подчинено закону Пуассона, во втором – геометрическому закону распределения. При этом на исправление одной ошибки в кванте затрачивается некоторое время τ.

Тогда, согласно (2), выражение для определения величины математического ожидания квантованной случайной величины для первого случая будет записано в виде

$$M_\lambda(x) = \left(x + \tau\sum_{k=0}^{\infty}\left(ke^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)\right)\int_0^\infty\left[E\left(\frac{z}{x}\right)+1\right]f(z)dz, \quad (3)$$

где $\tau\sum_{k=0}^{\infty}\left(ke^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)$ – пробел между квантами, обусловленный временем исправления ошибочного кванта величиной x, в котором может возникнуть некоторое среднее число k ошибок с интенсивностью λ.

Для второго случая

$$M_\rho(x) = \left(x + \tau\sum_{k=0}^{\infty}\left(k\left(p(1-p)^{k-1}\right)\right)\right)\int_0^\infty\left[E\left(\frac{z}{x}\right)+1\right]f(z)dz, \quad (4)$$

где p – вероятность возникновения ошибки.

Закон возникновения ошибок может быть любым. Приведенные в статье законы распределения выбраны в связи с тем, что они являются стационарными. Таким образом, вероятность появления ошибки не зависит от того, сколько их было до этого.

Пусть время, затраченное на исправление одной ошибки, составляет одну единицу. При этом предположим, что случайные ошибки возникают с разными параметрами, которые определяются значениями λ, p. Пусть при низких значениях появления случайных ошибок λ, p, будут равны 0,1, при средних – $\lambda, p = 0{,}5$, а при высоких – $\lambda, p = 0{,}9$.

В таблице 1 представлены расчетные параметры (3), (4) при разных значениях λ, p: где m – математическое ожидание, d – дисперсия и σ – среднеквадратическое отклонение.

Если представить величину пробела между квантами как сумму математического ожидания и одного среднеквадратического отклонения возникновения ошибки, при этом (3), (4) будут определяться так

$$M_\lambda(x) = (x + \tau(m_\lambda + \sigma_\lambda))\int_0^\infty (E(z/x)+1)df(z), \quad (5)$$

$$M_\rho(x) = (x + \tau(m_\rho + \sigma_\rho))\int_0^\infty (E(z/x)+1)df(z). \quad (6)$$

Далее будем полагать, что закон распределения поступающей информации нормальный с плотностью вероятности

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (7)$$

и имеет следующие параметры: $m_0 = 100$ ед., $\sigma_0 = 20$ ед.

На рис. 1 представлены графики выражения (5). Кривые на рисунке соответствуют: $M_{\lambda 1}(x)$ при $\lambda = 0{,}1$, $M_{\lambda 2}(x)$ при $\lambda = 0{,}5$, $M_{\lambda 3}(x)$ при $\lambda = 0{,}9$.

Аналогично на рис. 2 представлены графики выражения (6), со следующими параметрами: $M_{\rho 1}(x)$ при $p = 0{,}1$, $M_{\rho 2}(x)$ при $p = 0{,}5$, $M_{\rho 3}(x)$ при $p = 0{,}9$.

В таблице 2 приведены данные расчёта для всех шести моделей: x_0 – оптимальное значение кванта, $\alpha(x_0)$

Таблица 1

Параметр	Значение					
	λ=0,1	p=0,1	λ=0,5	p=0,5	λ=0,9	p=0,9
m	12,485	1,111	62,461	1,998	11,736	9,992
d	168,35	1,358	$3{,}365*10^3$	5,857	$1{,}266*10^4$	189,231
σ	3,532	0,351	7,985	1,38	13,177	9,454

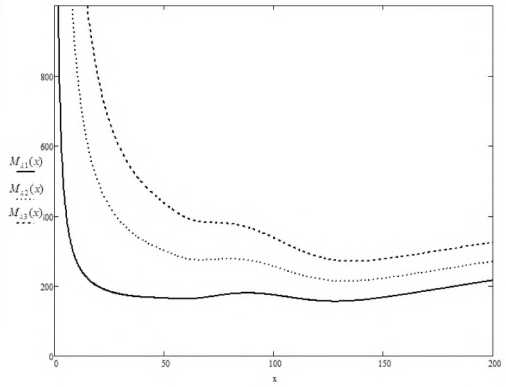

Рис. 1

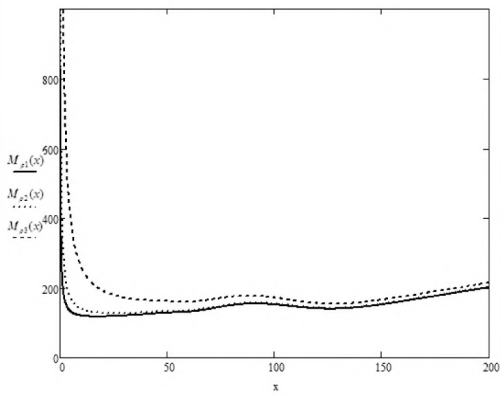

Рис. 2

– значение второго начального момента количества квантованной информации, $\sigma(x_0)$ – значение среднего квадратического отклонения количества квантованной информации, c – величина пробела между квантами.

Далее проведем расчёт зависимости изменения величины пробела между квантами от изменения значений λ, p и интерполируем полученные числовые данные.

Полученные кривые будут характеризовать зависимости выбора величин пробелов между квантами от параметра λ для закона распределения Пуассона (рис. 3) и p для геометрического закона (рис. 4).

Таким образом, используя приведенный выше алгоритм, можно рассчитать необходимую величину пробела между квантами для разных вариантов передачи информации.

Пример. В качестве практического примера рассмотрим следующий случай. Пусть передается поток информации без ошибок и с заданной функцией. Закон распределения поступающей информации нормальный с исходными параметрами (7). Оптимальные пробелы между квантами c – 3 ед. Тогда выражение для математического ожидания квантованной величины представляется в виде:

$$M(x) = (x + c)\int_0^\infty (E(z/x) + 1)df(z)\,. \qquad (8)$$

Таким образом, минимальная величина квантованной случайной величины будет M = 125,98 ед. при оптимальном кванте x = 24,78 ед.

Предположим, что в какой-то момент возникает фактор, приводящий к ошибкам в кванте. Возникновение ошибок распределено по закону Пуассона с параметрами $\lambda \le 0{,}4$. При этом время на исправление одной ошибки кванта составляет τ = 2 ед.

При таких условиях значения параметров в соответствии с (3) будут: m = 9,91, d = 108,17 и σ = 3,15. Для определения величины пробела между квантами, которая позволит гарантированно исправить ошибки применим правило трех сигм, тогда величина пробела между квантами будет определяться как

$$c = \tau(m + 3\sigma)\,. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$M_1(x) = (x + \tau(m + 3\sigma))\int_0^\infty (E(z/x) + 1)df(z)\,. \qquad (10)$$

Таким образом, выражение (10) позволяет определить, что оптимальное значение кванта 137,03 ед., а минимальное значение квантованной случайной величины 288,80 ед. при величине пробела между квантами 41,71 ед.

Таблица 2

Номер модели	Параметры			
	x_0	$\alpha(x_0)$	$\sigma(x_0)$	c
$\psi_{\lambda 1}(x)$	126,456	$5{,}311\times10^3$	72,877	16,017
$\psi_{p1}(x)$	18,190	$3{,}009\times10^3$	54,854	1,462
$\psi_{\lambda 2}(x)$	129,937	$3{,}509\times10^4$	187,315	70,446
$\psi_{p2}(x)$	26,597	$3{,}836\times10^3$	61,943	3,368
$\psi_{\lambda 3}(x)$	135,703	$8{,}312\times10^4$	288,307	124,913
$\psi_{p3}(x)$	128,220	$6{,}614\times10^3$	81,325	19,447

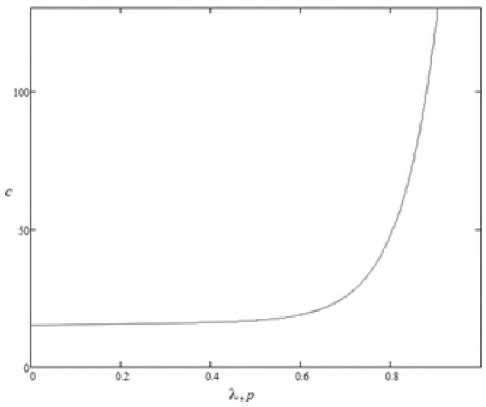

Рис. 3

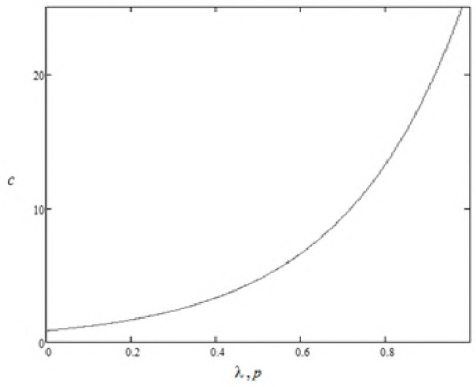

Рис. 4

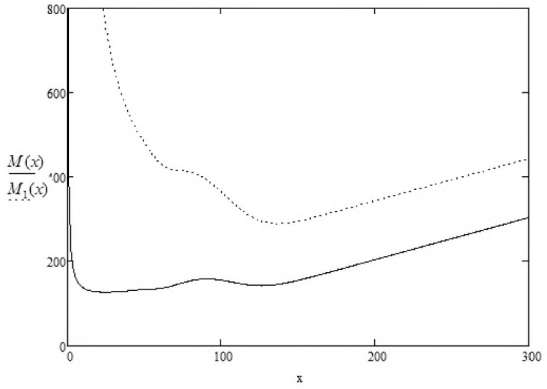

Рис. 5

На рис. 5 представлены графики функций $M(x)$ и $M_1(x)$.

Заключение

В отличие от решения задачи оптимального в смысле заполнения квантования информации с постоянной величиной пробела между квантами в данной статье решена задача оптимального квантования информации при условии, что величина пробела между квантами не является фиксированной. Она зависит от числа случайных ошибок, появившихся в квантах информации, умноженных на время устранения одной ошибки.

Полученные результаты позволяют определить случайные потери информации из-за возникающих ошибок и более объективно отражать процесс передачи, хранения и преобразования информации в различных системах.

Литература

1. Гришанин, Б. А. Учёт ценности информации в теории ценности информации / Б.А. Гришанин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 2. – С. 9–10.

2. Андронов, А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации / А.М. Андронов, Т.Н. Бокоев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.

3. Смагин, В. А. Определение гарантированной функции распределения величины кванта в задаче квантования информации / В.А. Смагин, С.А. Шерстобитов, О.А. Ширямов // Информация и Космос. – 2016. – № 2. – С. 72–76.