Алгоритмы оценивания и ангармоническое отношение

Assessment algorithm and anharmonic ratio

Бутырский / Butyrsky E.
Евгений Юрьевич
(evgenira88@mail.ru)
доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный работник высшей школы РФ.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», профессор кафедры теории управления.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: оператор – operator; динамическая система – dynamic system; дифференциальное уравнение – differential equation; матрица – matrix; многообразие – variety; коммутативность – commutativity.

В статье рассмотрен вопрос использования ангармонического отношения при решении задач оптимальной нелинейной фильтрации и, в частности, для расчета номинальных траекторий и матриц Гесса, что позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты. В статье проведено обобщение на случай матричного ангармонического отношения.

The paper considers issue in using anharmonic ratio when resolving tasks related to the optimum nonlinear filtration, and especially for calculating nominal paths and Gess matrices which allows for reduce calculation cost significantly. The paper conducted summarization on the case of matrix anharmonic ratio.

Введение

В данной статье будет рассмотрен вопрос построения алгоритмов оценивания, которые учитывают свойства симметрии динамической системы (ДС), и тем самым позволяют уменьшить вычислительные затраты. В частности, при субоптимальном оценивании состояния ДС, нелинейная составляющая которой представляется в виде квадратичной функции, используется свойство ангармонического отношения уравнения Риккати для расчета номинальных траекторий и матриц Гесса. При исследовании дифференциальных уравнений возникает вопрос, какие уравнения, кроме линейных, обладают фундаментальной системой решений. Для его решения существует следующая теорема.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{1}$$

обладает фундаментальной системой решений, если общее решение этих ДУ выражается через конечное число m произвольно выбранных частных решений:

$$\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n), \quad k = 1, 2, ..., m \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_m, C_1, ..., C_n), \tag{3}$$

содержащими n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частные решения называют фундаментальной системой решений уравнения (1). Общий вид уравнений с фундаментальным решением нашел С. Ли и доказал теорему [1, 2]. Уравнения (1) обладают фундаментальной системой решений, если они представимы в специальном виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = T_1(t)\zeta_1(\mathbf{x}) + ... + T_r(t)\zeta_r(\mathbf{x}), \tag{4}$$

так, что операторы

$$X_a = \zeta_a^i(x)\frac{d}{dx^i}, \quad a = 1, 2, ..., r \tag{5}$$

образуют r-мерную алгебру Ли. При этом число необходимых частных фундаментальных решений (2) удовлетворяют условию $nm \geq r$.

Пример 1. Для линейного однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ имеем n=1, m=1, r=1, $X = x\frac{d}{dx}$. Представление (4) общего решения через частное решение x_1 имеет вид $x = Cx_1$. Условие $mn = r = 1$ выполняется в виде равенства.

Пример 2. Примером нелинейного уравнения с фундаментальными решениями является скалярное уравнение Риккати:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \tag{6}$$

Уравнение имеет вид (4) с r=3 и инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x\frac{d}{dx}, \quad X_3 = x^2\frac{d}{dx}, \tag{7}$$

образующими алгебру Ли L_3. Условие теоремы дает $m \geq 3$, так что для выражения общего решения уравнения Риккати с произвольными коэффициентами $a(t), b(t), c(t)$ требуется не менее трех частных решений. На самом деле достаточно знать только три решения, так как любые четыре решения уравнения Риккати связаны условием постоянства их ангармонического отношения [2, 3]:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_3} = \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_2} : \frac{K_4 - K_1}{K_4 - K_3}. \tag{8}$$

В частности, из выражения (8) нетрудно получить:

$$x_4 = \frac{Xx_3 - x_1 K(k_4)}{X - K(k_4)}, \text{ где } X = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2},$$

$$K(k_4) = \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_3}{k_4 - k_1}. \tag{9}$$

Практическое использование равенства (9) состоит в том, что можно заранее рассчитать три решения при заданных начальных условиях, а затем при изменении начальных условий получить новое решение при значительно меньших вычислительных затратах. Теорема Ли позволяет найти все обыкновенные дифференциальные уравнения, имеющие фундаментальную систему решений, сводя задачу к перечислению всевозможных групп преобразований с конечным числом параметров в n-мерном пространстве переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Матричное уравнение Риккати

Всякая группа преобразований на прямой (n=1) совпадает с группой проективных преобразований на прямой, порожденной трехмерной алгеброй Ли с базисом операторов (7). Это означает, что скалярное уравнение Риккати является самым общим уравнением, обладающим фундаментальной системой уравнений и является своеобразной реализацией группы проективных преобразований.

Для построения алгоритма оценивания решим предварительно задачу определения аналога ангармонического отношения для матричного уравнения Риккати. Задачу будем решать в два этапа:

– представление матричного уравнения Риккати в виде линейной системы двух матричных уравнений;

– определение фундаментального решения и построение аналога ангармонического отношения.

В фундаментальной работе [4], посвященной изучению матричного уравнения Риккати, оно обычно представляется в следующем виде:

$$\mathbf{W}' = (\mathbf{C} + \mathbf{W})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}^T + \mathbf{W}) - \mathbf{B}, \quad \mathbf{W}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \tag{10}$$

– симметричные матрицы.

С другой стороны, в теории фильтрации дифференциальное матричное уравнение Риккати обычно записывают в форме:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N_1} + \mathbf{AR} + \mathbf{RA}^T - \mathbf{RMR}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{H^T N_0^{-1} H}. \tag{11}$$

Чтобы не путать матрицу $\mathbf{A}$ уравнении (11) с матрицей $\mathbf{A}$ в (10), обозначим последнюю через $\mathbf{Q}$. Тогда:

$$\mathbf{W}' = (\mathbf{C} + \mathbf{W})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{C}^T + \mathbf{W}) - \mathbf{B}. \tag{12}$$

Учитывая, что исследование фундаментальных геометрических свойств уравнения удобнее проводить в форме (12), а в фильтрации принята форма (11), укажем их взаимосвязь. Перемножив сомножители в (12) получим матричное дифференциальное уравнение, представленное в форме:

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{CQ^{-1}C^T} + \mathbf{CQ^{-1}W} + \mathbf{WQ^{-1}C^T} + \mathbf{WQ^{-1}W} - \mathbf{B}. \tag{13}$$

Сравнивая слагаемые в (11) и в (13), получим взаимосвязь между матрицами в вышеуказанных уравнениях: $\mathbf{R} = \mathbf{W}, \mathbf{A} = \mathbf{CQ}^{-1}, \mathbf{N_1} = \mathbf{B}$. Для выяснения, чему равна матрица $\mathbf{M}$, решим равенство: $\mathbf{RMR} = \mathbf{WMW} = \mathbf{CQ^{-1}C^T} + \mathbf{WQ^{-1}W}$ относительно $\mathbf{M}$. Для этого перемножим последнее соотношение справа и слева на $\mathbf{W^{-1}}$. В результате получим: $\mathbf{M} = \mathbf{W^{-1}CQ^{-1}W^{-1}} + \mathbf{Q}^{-1}$.

Таким же образом можно получить формулы обратного пересчета:

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{R^{-1}AR^{-1}}) \\ \mathbf{Q} = (\mathbf{M} - \mathbf{R^{-1}AR^{-1}})^{-1} \\ \mathbf{W} = \mathbf{R} \\ \mathbf{B} = \mathbf{N_1} \end{cases}.$$

Покажем, что между матричным уравнением Риккати и системой линейных матричных уравнений существует взаимосвязь. Для этого рассмотрим представление (11). Воспользуемся подстановкой Бернулли:

$$\mathbf{R} = \mathbf{UV}^{-1}, \tag{14}$$

$\mathbf{V}, \mathbf{U}$ – решение системы из $2n$ ДУ, получаемых из уравнений Риккати.

Подставив (14) в левую и правую части (11) получаем:

$$\frac{d\left(\mathbf{UV}^{-1}\right)}{dt} = \mathbf{U}\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt} + \frac{d\mathbf{U}}{dt}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{N_1} + \mathbf{AUV}^{-1} + \mathbf{UV^{-1}A^T} - \mathbf{UV^{-1}MUV}^{-1}. \tag{15}$$

Умножим последнее соотношение справа на $\boldsymbol{V}$. В результате имеем:

$$\mathbf{U}\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt}\mathbf{V}+\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{N}_1\mathbf{V}+\mathbf{AU}+\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}-\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{MU}. \quad (16)$$

Группируя слагаемые в левой и правой частях (16):

$$\left(\mathbf{U}\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt}\mathbf{V}-\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}+\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{MU}\right)+\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}-\mathbf{N}_1\mathbf{V}-\mathbf{AU}\right)=\mathbf{0}. \quad (17)$$

Так как в определении **R** участвуют две матричные функции, можно ограничить их дополнительным условием выполнения уравнения:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}-\mathbf{N}_1\mathbf{V}-\mathbf{AU}=\mathbf{0}. \quad (18)$$

Тогда слагаемое в первой скобке ДУ (17) должно удовлетворять условию:

$$\mathbf{U}\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt}\mathbf{V}-\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}+\mathbf{UV}^{-1}\mathbf{MU}=\mathbf{0}. \quad (19)$$

Умножая уравнение (19) на $\boldsymbol{U}^{-1}$ слева получаем:

$$\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt}\mathbf{V}-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}+\mathbf{V}^{-1}\mathbf{MU}=\mathbf{0}. \quad (20)$$

Умножим последнее уравнение на $\boldsymbol{V}$ слева, и учитывая тождество:

$$\mathbf{V}\frac{d\mathbf{V}^{-1}}{dt}\mathbf{V}=-\frac{d\mathbf{V}}{dt},$$

получаем второе матричное линейное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}+\mathbf{MU}. \quad (21)$$

Таким образом, получаем систему линейных матричных уравнений для переменных $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ соответствующих матричному уравнению Риккати:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{AU}+\mathbf{N}_1\mathbf{V}\\ \dfrac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{MU}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}.\end{cases} \quad (22)$$

Пусть $(\mathbf{U}_1,\mathbf{V}_1)$ и $(\mathbf{U}_2,\mathbf{V}_2)$ – два частных решения этой системы, выбранных так, что произведения $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}$, $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2^{-1}$ не равны одной и той же постоянной матрице. Тогда фундаментальное решение может быть записано в виде:

$$\mathbf{U}=\mathbf{C}_1\mathbf{U}_1+\mathbf{C}_2\mathbf{U}_2,\ \ \mathbf{V}=\mathbf{C}_1\mathbf{V}_1+\mathbf{C}_2\mathbf{V}_2, \quad (23)$$

а общее решение уравнения Риккати дается формулой:

$$\mathbf{R}=\mathbf{UV}^{-1}=(\mathbf{C}_1\mathbf{U}_1+\mathbf{C}_2\mathbf{U}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{V}_1+\mathbf{C}_2\mathbf{V}_2)^{-1}. \quad (24)$$

До последнего времени при исследовании уравнения Риккати обычно использовались аналитические методы без широкого привлечения геометрических аспектов. Но в последние три десятилетия наблюдается бурное развитие геометрических подходов применительно к уравнению Риккати. В частности, было замечено, что уравнение Риккати определяют гладкий поток на многообразии Лагранжа-Грассмана. Однако эти идеи изложены в основном в журнальных статьях и не нашли достаточного освещения в монографической литературе. В определенной степени этот пробел восполняет монография [4], в которой достаточно глубоко исследуются вопросы связи уравнения Риккати с вариационными задачами и задачами оптимального управления, а также с геометрией многообразий Лагранжа-Грассмана и классическими областями однородности Картана-Зигеля в пространстве многих комплексных переменных. Но применительно к задачам нелинейной фильтрации и построения приближенных алгоритмов оценивания, свойства уравнения Риккати не учитывались, и работ на эту тематику практически нет. В настоящей статье будут рассмотрены некоторые подходы, которые, по мнению автора, в некоторой степени ликвидирует этот пробел, и представляют определенный теоретический и практический интерес при синтезе алгоритмов обнаружения и фильтрации. Для того чтобы пояснить геометрическую природу уравнения Риккати, рассмотрим линейное ДУ второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $y(t)$:

$$y''+a(t)y'+b(t)y=0\ . \quad (25)$$

Замена переменной $y'=zy$ приводит его к уравнению первого порядка, правая часть которого квадратично зависит от неизвестной функции x:

$$x'+A(t)x^2+B(t)x+C(t)=0\ . \quad (26)$$

Уравнение (26) является уравнением Риккати. Давно была замечена связь между ДУ Риккати и группой дробно-линейных преобразований. Приведем основные классические результаты.

Теорема 1. Общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от постоянной интегрирования. Обратно, всякое дифференциальное уравнение первого порядка, обладающее этим свойством, есть уравнение Риккати.

Теорема 2 Двойное отношение четырех частных решений уравнения Риккати есть интеграл этого уравнения.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если известны три частных решения x_1,x_2,x_3, то можно написать формулу для любого решения этого уравнения, приравняв константе двойное отношение четверки решений:

$$\frac{x_3-x_2}{x-x_1}:\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}=C. \quad (27)$$

Проективные свойства уравнения Риккати заключаются в следующем. Уравнение Риккати получено от линейного однородного уравнения (25), которое описывает поток линейных преобразований фазовой плоскости (y, y'),переходом от однородных координат к аффинной координате $x = y'/y$. При этом линейные преобразования плоскости переходят в проективные преобразования проективной прямой, которые представляют собой дробно-линейные преобразования аффинной координаты. В этом проявляется глубокая внутренняя причина того, что уравнение Риккати с необходимостью возникает во многих, казалось бы далеких друг от друга, областях математики. Но применительно к нелинейному оцениванию ДС важно появление уравнений Риккати в вариационном исчислении и теории оптимального управления. Анализируя задачи минимизации, вкратце рассмотрим основные геометрические аспекты матричного уравнения Риккати и его тесную связь с геометрией однородных пространств.

Вместо скалярного ДУ рассмотрим систему ДУ с квадратичной правой частью. При этом роль проективной прямой будут играть ее многомерные аналоги – многообразия Грассмана и Лагранжа-Грассмана. При этом нам понадобится многомерный аналог двойного отношения – матричное двойное отношение. Понятие двойного матричного отношения появилось одновременно в целом ряде работ. Наиболее яркой работой является классическая работа Зигеля, где с помощью матричного двойного отношения введена эрмитова метрика на обобщенной верхней полуплоскости Зигеля. В соответствии с этой традицией, в монографии [4] матричное двойное отношение применяется не только к исследованию уравнению Риккати и к отысканию его интегралов, но и к изучению геометрии многообразий Грассмана и Лагранжа-Грассмана. Очень полезной оказывается идея комплексификации ДУ Риккати. В зависимости от специфики коэффициентов комплексного уравнения Риккати оно определяет поток на той или иной из симметричных областей однородности Картана-Зигеля. Для выяснения некоторых свойств уравнения Риккати матричного типа воспользуемся представлением (12). Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если в качестве начального условия уравнения Риккати взята симметричная матрица $\mathbf{W}(t_0)$, то решение уравнения будет симметрическим при всех значениях t.

Для решения уравнения необходимо найти симметричную матрицу $\mathbf{W}$. Уравнение Риккати появляется при понижении порядка линейного дифференциального уравнения второго порядка. Аналогичное соотношение имеет место между решением матричного линейного уравнения Якоби:

$$-\frac{d}{dt}(\mathbf{QU}^{\mathbf{T}} + \mathbf{CU}) + (\mathbf{CU}' + \mathbf{BU}) = \mathbf{0} \tag{28}$$

и матричным уравнением Риккати. В работе показано [4], что по решению $\mathbf{U}(t)$ можно построить одно и только одно решение уравнения Риккати, соответствующее тем же начальным условиям.

Лемма 2. Пусть $\mathbf{U}(t)$ – матричное решение уравнения Якоби (28), не вырождающееся на интервале $(t_0, t_1]$. Тогда $\mathbf{W} = -(\mathbf{QU}' + \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}$

Матричное уравнение Риккати и многообразие Грассмана

Одним из наиболее существенных фактов при рассмотрении уравнения Риккати является его взаимосвязь с таким геометрическим объектом, как многообразие Грассмана. Напомним, что k-мерным топологическим многообразием M называется топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность U_x, гомеоморфную множеству $V_x \subset \mathbf{R}^{\mathbf{k}}$. Множество U_x, и соответствующий гомеоморфизм $\phi : U_x \to V_x$ называется картой на многообразии M. Координаты точек $\phi(y)$ при $y \in U_x$ называются локальными координатами в этой карте. Если в точке заданы две системы локальных координат (U_i, ϕ_i) и (U_i, ϕ_i), то можно рассмотреть функции перехода $g_{ij} = \phi_i(\phi_j)^{-1} : \mathbf{R}^{\mathbf{k}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{k}}$, определенные на множестве $\phi_j(U_i \bigcap U_j)$. Отображение ϕ_i, ϕ_j в этой конструкции присутствуют как бы незримо: явными аналитическими формулами задаются только функции перехода g_{ij}. Для того, чтобы g_{ij} могли быть получены из каких-либо отображений ϕ_i, необходимо потребовать выполнения естественного «цепного условия»: для всех точек $y \in U_i \bigcap U_j \bigcap U_k$ выполнено равенство $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$. Для того чтобы определить гладкое многообразие, надо потребовать, чтобы все функции g_{ij} имели один и тот же класс гладкости. Набор карт, покрывающих M вместе с соответствующими функциями перехода, называется атласом. Атласы эквивалентны, если их объединение снова является атласом. Класс эквивалентных атласов задает на M структуру гладкого многообразия. Класс гладкости функций перехода называется классом гладкости данного многообразия.

Для определения структуры многообразия Грассмана на $G_n(\mathbf{R}^{\mathbf{2n}})$ рассмотрим карту U, которая строится следующим образом. В $2n$-мерном пространстве переменных $(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ выберем две n-мерные плоскости $\mathbf{H_0} = \{(\mathbf{h}, 0)\}$ и $\mathbf{H}_\infty = \{(0, \mathbf{p})\}$, которые называются горизонтальной и вертикальной плоскостью соответственно.

Рассмотрим две проекции, $\pi_0 : (\mathbf{h}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{h}, 0)$ и $\pi_\infty : (\mathbf{h}, \mathbf{p}) \to (0, \mathbf{p})$. Первая из этих проекций есть проектирование пространства $(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ на $\mathbf{H_0}$ параллельно $\mathbf{H}_\infty$, а вторая – на $\mathbf{H}_\infty$ параллельно $\mathbf{H_0}$. Областью определения карты U будет множество m-мерных подпространств $\mathbf{R}^{\mathbf{2n}}$, трансверсальных к вертикальной плоскости $\mathbf{H}_\infty$. Проекция π_0 любого подпространства $\mathbf{W} \in \mathbf{U}$ на плоскость $\mathbf{H_0}$ параллельно $\mathbf{H}_\infty$ взаимно однозначно. Зафиксируем базисы в плоскостях $\mathbf{H_0}$ и $\mathbf{H}_\infty$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{Z}$, которая задает отображение $\pi_\infty \circ (\pi_0)^{-1}$. Элементы матрицы $\mathbf{Z}$ будут локальными координатами плоскости

$\mathbf{W}$ в рассматриваемой карте. Векторы плоскости $\mathbf{W}$ могут быть записаны в виде $(\mathbf{h},\mathbf{Wh})$. Другие карты определяются также, изменяется лишь пара трансверсальных плоскостей $\mathbf{H_0}$ и $\mathbf{H}_\infty$.

Чтобы найти функции перехода, рассмотрим две карты U и $\tilde{U}$ на многообразии Грассмана. Пусть плоскость $\mathbf{W}$ принадлежит $U\bigcap\tilde{U}$. Найдем координаты плоскости $\mathbf{W}$ в карте $\tilde{U}$. Для этого рассмотрим преобразование $\Omega:\mathbf{R^{2n}}\to\mathbf{R^{2n}}$, которое переводит пару плоскостей $\mathbf{H_0}$ и $\mathbf{H}_\infty$ в пару плоскостей $\tilde{\mathbf{H}}_\mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{H}}_\infty$. Пусть

$\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix}$ – блочное $(n\times n)$ разбиение матрицы Ω.

Поскольку $\mathbf{W}\in\tilde{U}$, она трансверсальна $\tilde{\mathbf{H}}_\infty$. Координаты $\tilde{\mathbf{W}}$ плоскости $\mathbf{W}$ в карте $\tilde{U}$ находятся следующим образом:

$$(\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\mathbf{p}})=((\Omega_{\mathbf{11}}+\Omega_{12}\mathbf{W})\mathbf{h},(\Omega_{21}+\Omega_{22}\mathbf{W})\mathbf{h}). \tag{29}$$

Матрица $\Omega_{\mathbf{11}}+\Omega_{12}\mathbf{W}$ обратима. Поэтому: $\mathbf{h}=(\Omega_{11}+\Omega_{12}\mathbf{W})^{-1}\tilde{\mathbf{h}}$, а точка имеет вид $(\tilde{\mathbf{h}}(\Omega_{\mathbf{21}}+\Omega_{22}\mathbf{W})(\Omega_{\mathbf{11}}+\Omega_{12}\mathbf{W})^{-1}\tilde{\mathbf{h}})$. Ее координатами точки в карте $\tilde{U}$ будет матрица:

$$\mathbf{W}=(\Omega_{\mathbf{21}}+\Omega_{22}\mathbf{W})(\Omega_{\mathbf{11}}+\Omega_{12}\mathbf{W})^{-1}\ . \tag{30}$$

Преобразование (31) называется обобщенным дробно-линейным преобразованием. Тем самым функциями перехода из карты U в карту $\tilde{U}$ являются обобщенные дробно-линейные преобразования. Поскольку эти функции аналитические, на многообразии Грассмана введена структура аналитического многообразия. Легко проверить, что группа $GL(n)$ гомоморфно отображается в группу обобщенных дробно-линейных преобразований пространства $(k\times(n-k))$ – матриц. При умножении всех элементов матрицы $\begin{pmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}$ на ненулевой скаляр матрица: $(\mathbf{C}+\mathbf{DW})(\mathbf{Q}+\mathbf{BW})^{-1}$ не меняется, поэтому действие группы обобщенных дробно-линейных преобразований на многообразии Грассмана можно рассматривать как действие группы $SL(n)$.

Рассмотрим представление уравнения Риккати как поток на многообразии Грассмана. Пусть в пространстве $\mathbf{R^{2n}}$ задана линейная система обыкновенных ДУ с гладкими коэффициентами. Известно [4, 5], что решения такой системы неограниченно продолжимы по времени. Это продолжение может быть осуществлено оператором вида: $\Gamma(t_0,t_1):\mathbf{R^{2n}}\to\mathbf{R^{2n}}$, который начальной траектории $x_0\in\mathbf{R^{2n}}$ в момент t_0 ставит в соответствие ее конечную точку $x_1\in\mathbf{R^{2n}}$ в момент времени t_1. В силу линейности системы $\Gamma(t_0,t_1)$ есть невырожденный оператор.

Операторы $\Gamma(t_0,t_1)$ обладают групповым свойством: $\Gamma(t_0,t_1)\circ\Gamma(t_1,t_2)=\Gamma(t_0,t_2)$.

Говорят, что это семейство операторов образует нестационарный поток Γ на $\mathbf{R^{2n}}$. В силу линейности и невырожденности операторы $\Gamma(t_0,t_1)$ переводят n-мерные подпространства также в n-мерные подпространства. Таким образом, поток Γ индуцирует поток $\tilde{\Gamma}$ на грассмановом многообразии $\mathbf{G_n}(\mathbf{R^{2n}})$. Показано [4], что векторное поле, определяющее поток $\tilde{\Gamma}$, задается полем правых частей уравнений Риккати. То есть, если считать, что плоскости $\mathbf{W}$ переносятся под воздействием потока, описываемого линейной канонической системой ДУ с гамильтонианом, то уравнение Риккати возникает как уравнение для локальных координат $\mathbf{W}$ на многообразии Грассмана. Как показано в [4], уравнение Риккати можно рассматривать как уравнение, описывающее эволюцию n-мерных линейных подпространств при действии на них потока симплектических преобразований, порожденного канонической системой обыкновенных ДУ. Где каноническая система уравнений с гамильтонианом имеет вид:

$$\begin{cases}\mathbf{h}'=-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}+\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{p}\\ \mathbf{p}'=(\mathbf{B}-\mathbf{C}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})\mathbf{h}+\mathbf{C}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{p}\end{cases}. \tag{32}$$

$\mathbf{Q},\mathbf{B}$ – симметричные матрицы.

Отображение $\Gamma(t_0,t_1)$, описывающее сдвиг по траектории системы (32) за время $[t_0,t_1]$, задается фундаментальной матрицей решений системы (32).

Теорема. Если $\Gamma(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{pmatrix}$ – фундаментальная матрица решений системы (32), то:

$$\mathbf{W}=(\Gamma_{\mathbf{21}}+\Gamma_{22}\mathbf{W_0})(\Gamma_{11}+\Gamma_{12}\mathbf{W_1})^{-1} \tag{33}$$

есть решением ДУ Риккати.

Матричное ангармоническое отношение

При исследовании одномерного ДУ Риккати важную роль играет двойное отношение четырех точек, лежащих на проективной прямой. Проективная природа многообразия $\mathbf{G_n}(\mathbf{R^{2n}})$ позволяет ввести аналогичное понятие, которое может быть использовано при изучении многомерного уравнения Риккати.

Рассмотрим, как меняется матрица двойного отношения при «проективных» преобразованиях, т.е. при действии группы $SL(2n)$ на многообразии $\mathbf{G_n}(\mathbf{R^{2n}})$. Известно [4, 5], что группа $SL(2n)$ порождается преобразованиями:

1. $\mathbf{W}\to\mathbf{W}+\mathbf{Q}$;
2. $\mathbf{W}\to\mathbf{CWB}$; $\det\mathbf{B}=\det\mathbf{C}$;
3. $\mathbf{W}\to-\mathbf{W}^{-1}$.

В результате проверки действий преобразований 1–3 на двойное отношение показано, что класс матриц, подобных матрице двойного отношения, является инвариантом относительно действия группы $SL(2n)$, означает, что указанный класс не зависит от выбора карты Ω, т.е. от выбора плоскостей $\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_\infty$. Матрицу двойного отношения $\mathbf{DV}$ определяют как скалярную, если имеет место равенство $\mathbf{DV}=\sigma\mathbf{I_n}\ \sigma\in\mathbf{R}$. В случае

$\mathbf{DV} = -1$ двойное отношение называют гармоническим [2, 4]. Так как в этом случае класс матриц, подобных $\mathbf{DV}$, состоит всего из одной матрицы $\sigma\mathbf{I}$, то определения скалярного и гармонического двойного отношения не зависят от выбора представителя из класса подобных матриц.

Определенное выше матричное ангармоническое отношение, в связи с некоммутативностью перемножения матриц, обладает неоднозначностью, которая зависит от принятого порядка их перемножения (общее число вариантов равно числу перестановок сомножителей −12). Но с другой стороны, учитывая симметричные свойства корреляционных матриц, можно указать несколько классов матричных уравнений, для которых однозначно определяется ангармоническое отношение, вне зависимости от порядка умножения матриц. Таким образом, задача получения ангармонического отношения для матричного уравнения Риккати связана с определением класса матриц обладающих коммутативностью.

В матричном анализе имеет место следующая теорема:

Уравнение $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ имеет единственное решение, если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ − не имеют общих собственных значений.

Важным частным случаем теоремы является однородная задача $(\mathbf{C} = \mathbf{0})$, в которой $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. Т.е. для данной матрицы $\mathbf{A}$ мы должны найти матрицы $\mathbf{X}$, которые удовлетворяют равенству $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, которые коммутируют с $\mathbf{A}$.

1. Известно [6], что если матрицу $\mathbf{A}$ можно представить в виде произведения $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, $\mathbf{J}$ − жорданова нормальная форма для $\mathbf{A}$, то $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ эквивалентно $\mathbf{JY} = \mathbf{YJ}$, где матрица $\mathbf{J}$ определяется соотношением $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{XP}$.

2. Важным частным случаем этого редуцированного уравнения является случай, когда $\mathbf{A}$ простая матрица. Простая матрица − это такая матрица, которая преобразованием подобия может быть приведена к диагональному виду $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ (где $\mathbf{T}$ − унитарная преобразующая матрица).

3. Свойством коммутативности обладают циркулянтные матрицы. Циркулянтной матрицей (ЦМ) называется матрица вида:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что циркулянтные матрицы обладают многими важными свойствами, которые связаны с теоретико-групповыми представлениями [6].

Определив класс матриц, удовлетворяющих условию коммутативности, определим обобщенное понятие ангармонического отношения для коммутативных матриц. Для его определения необходимо знать четыре частных решения $\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}, \mathbf{R_3}, \mathbf{R_4}$. $\mathbf{R}_i = \mathbf{UV^{-1}} = (\mathbf{C}_1^{(i)}\mathbf{U_1} + \mathbf{C}_2^{(i)}\mathbf{U_2})(\mathbf{C}_1^{(i)}\mathbf{V}_1 + \mathbf{C}_2^{(i)}\mathbf{V}_2)^{-1}$, $i = 1,2,3,4$.

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_1^{(i)}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2)\mathbf{U}_2\mathbf{V_1^{-1}}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})^{-1}\mathbf{C_1^{(i)-1}}.$$

Так как $\mathbf{R}_i, \mathbf{C}_1^{(i)}, \mathbf{C_2^{(i)}}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ относятся к одному из классов коммутативных матриц, матрицу $\mathbf{R_i}$ можно привести к виду: $\mathbf{R}_i = (\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A}_1)\mathbf{U}_2\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})^{-1}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{R_i} - \mathbf{R_j}$, $i > j$. Имеем:

$$\mathbf{R}_i - \mathbf{R_j} = (\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A}_1)\mathbf{U}_2\mathbf{V_1^{-1}}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})^{-1} - \\ - (\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A}_1)\mathbf{U}_2\mathbf{V_1^{-1}}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A_2})^{-1}.$$

В силу принятия условия коммутативности исходных матриц, последнее выражение преобразовать можно следующим образом:

$$\mathbf{U}_2\mathbf{V_1^{-1}}\Big[(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A}_1)(\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A_2}) - \\ - (\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A}_1)(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})\Big](\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A}_1)^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})^{-1}.$$

Преобразуя выражения в квадратных скобках, находим:

$$\mathbf{R_i} - \mathbf{R_j} = \mathbf{U}_2\mathbf{V_1^{-1}}\Big[(\mathbf{K_i} - \mathbf{K}_j)(\mathbf{A_j} - \mathbf{A}_i)\Big](\mathbf{1} + \mathbf{K}_j\mathbf{A}_1)^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{K}_i\mathbf{A_2})^{-1}.$$

Далее рассмотрим отношение $\mathbf{S_1} = (\mathbf{R_2} - \mathbf{R_2})(\mathbf{R_3} - \mathbf{R_2})^{-1}$. Нетрудно получить следующее выражение:

$$\mathbf{S_1} = (\mathbf{K_2} - \mathbf{K_1})(\mathbf{K_3} - \mathbf{K_2})^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{K_3A_2})(\mathbf{1} + \mathbf{K_1A_2})^{-1}.$$

Аналогично рассуждая, имеем $\mathbf{S_2}$:

$$\mathbf{S}_2 = (\mathbf{K}_4 - \mathbf{K}_3)(\mathbf{K}_4 - \mathbf{K}_3)^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{K_3A_2})(\mathbf{1} + \mathbf{K_1A_2})^{-1}.$$

Вычислив произведение $\mathbf{S_1S_2^{-1}}$, находим ангармоническое отношение для матричного уравнения Риккати с матрицами заданного типа:

$$\mathbf{An} = \frac{(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R_1})}{(\mathbf{R_3} - \mathbf{R_2})}\frac{(\mathbf{R}_4 - \mathbf{R_1})}{(\mathbf{R_4} - \mathbf{R_3})} = \frac{(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K_1})}{(\mathbf{K_3} - \mathbf{K_2})}\frac{(\mathbf{K_4} - \mathbf{K_1})}{(\mathbf{K_4} - \mathbf{K_3})}. \tag{34}$$

Пример. Предположим, что задана матричная система уравнений второго порядка. Тогда учитывая специальную структуру матриц модно записать:

$$\mathbf{R_i} = \begin{pmatrix} r_1^i & r_2^i \\ r_2^i & r_1^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K_i} = \begin{pmatrix} k_1^i & k_2^i \\ k_2^i & k_1^i \end{pmatrix}.$$

Если обозначить:

$$\mathbf{An} = \begin{pmatrix} \mathbf{An}_{1,1} & \mathbf{An}_{1,2} \\ \mathbf{An}_{2,1} & \mathbf{An}_{2,2} \end{pmatrix}$$

и учесть, что из условий вытекает равенства:

$$\mathbf{An}_{1,1} = \mathbf{An}_{2,2}, \quad \mathbf{An}_{1,2} = \mathbf{An}_{2,1}$$

получаем:

$$\mathbf{An}_{1,1} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)(c_1d_1 + c_2d_2) - (a_2b_1 + a_1b_2)(c_1d_2 + c_2d_1)}{c_1^2d_1^2 + c_2^2d_2^2 - c_1^2d_2^2 - c_2^2d_1^2}, \tag{35}$$

$$\mathbf{An}_{1,2} = \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)(c_1d_1 + c_2d_2) - (a_1b_1 + a_2b_2)(c_1d_2 + c_2d_1)}{c_1^2d_1^2 + c_2^2d_2^2 - c_1^2d_2^2 - c_2^2d_1^2}, \tag{36}$$

$$a_1 = r_1^2 - r_1^1, \quad a_2 = r_2^2 - r_2^1, \quad b_1 = r_1^4 - r_1^2, \quad b_2 = r_2^4 - r_2^2,$$
$$c_1 = r_1^3 - r_1^2, \quad c_2 = r_2^3 - r_2^2, \quad d_1 = r_1^4 - r_1^3, \quad d_2 = r_2^4 - r_2^3.$$

Аналогичные отношения можно получить и для правой части ангармонического отношения $\mathbf{An}$. Анализ выражений $\mathbf{An}_{1,1}$ и $\mathbf{An}_{1,2}$ показывает, что частным случаем для них является скалярное ангармоническое отношение (но при этом $\mathbf{An}_{1,2} = \mathbf{An}_{2,1} = 0$). Для диагональных матриц с различными по величине элементами, получаем следующие соотношения для ангармонического отношения:

$$\mathbf{An} = \begin{pmatrix} \dfrac{r_1^2 - r_1^2}{r_1^3 - r_1^2} : \dfrac{r_1^4 - r_1^3}{r_1^4 - r_1^1} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_2^2 - r_2^2}{r_2^3 - r_2^2} : \dfrac{r_2^4 - r_2^3}{r_2^4 - r_2^1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{k_1^2 - r_1^2}{k_1^3 - k_1^2} : \dfrac{k_1^4 - k_1^3}{k_1^4 - k_1^1} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_2^2 - k_2^2}{k_2^3 - k_2^2} : \dfrac{k_2^4 - k_2^3}{k_2^4 - k_2^1} \end{pmatrix}.$$

В групповом анализе имеет место следующая теорема:

Обыкновенное ДУ первого порядка, обладающее фундаментальной системой решений, линеаризуется преобразованием зависимой переменной $\mathbf{x}$ в том и только в том случае когда, оно может быть записано в специальном виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dx} = T_1(t)\zeta_1(x) + T_2(t)\zeta_2(t) \tag{37}$$

так, что операторы $\mathbf{X_1} = \zeta_1(t)\dfrac{d}{dx}$, $\mathbf{X_2} = \zeta_2(t)\dfrac{d}{dx}$ образуют алгебру Ли L_r размерности $r = 2$ или $r = 1$ с соответствующими коммутаторами: $[\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}] = \alpha\mathbf{X_1} + \beta\mathbf{X_2}$ и $\mathbf{X_2} = \alpha\mathbf{X_1}$ с постоянными коэффициентами α, β.

К примеру, если задано скалярное ДУ:

$$\mathbf{X_1} = \zeta_1(t)\frac{d}{dx}, \quad \mathbf{X}_2 = \zeta_2(t)\frac{d}{dx},$$

то, учитывая теорему, имеем:

$$T_1 = A,\ T_2 = B,\ \zeta_1 = x^2,\ \zeta_2 = x,\ \mathbf{X_1} = x^2\frac{d}{dx}, \quad \mathbf{X_2} = x\frac{d}{dx}.$$

Нетрудно проверить коммутационное соотношение $[\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}] = \mathbf{X_1}$.

Таким образом, операторы Ли образуют двумерную алгебру L_2.

Для отыскания линеаризующей замены зависимой переменной выберем новый базис $\mathbf{X} = \mathbf{X_2}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X_1}$. Теперь найдем замену $y = f(x)$, переводящую оператор $\mathbf{X}$ к виду $\mathbf{X} = \dfrac{d}{dy}$. Для этого решаем уравнение $\mathbf{X}(y) \equiv x^2\dfrac{dy}{dx} = 1$ и находим $y = -\dfrac{1}{x}$. Замена переводит алгебру, порожденную операторами $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$, в алгебру, порожденную базисом операторов: $\mathbf{X_1} = \dfrac{d}{dx}$, $\mathbf{X_2} = x\dfrac{d}{dx}$. После замены переменной (38) приводится к виду:

$$\frac{dy}{dt} = -B(t)y + A(t).$$

Полученный результат легко обобщается на матричное ДУ Риккати вида:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{A}(t)\mathbf{R} + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}. \tag{38}$$

Полагая $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}$, получаем выражение:

$$\mathbf{S}^{-1}\frac{d\mathbf{S}}{dt}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{B}(t)\mathbf{S}^{-1}.$$

Далее, умножая слева и справа на $\mathbf{S}$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\mathbf{S}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t). \tag{39}$$

Для заданного уравнения, используя методы группового анализа, найдем замену переменной при которых уравнение (38) превратится в линейное относительно $\mathbf{R}$. Учитывая, что теорема удовлетворяется только в случае, когда алгебра Ли имеет порядок не выше двух, необходимо, чтобы на матрицы в уравнении были наложены довольно жесткие ограничения коммутативности. В частности, для диагональных матриц все множество операторов разбивается на непересекающиеся множества двумерных алгебр с операторами вида:

$$T_{i1} = A_i, \quad T_{i2} = B_i, \quad \zeta_{i1} = x_i^2, \quad \zeta_{i2} = x_i,$$
$$\mathbf{X}_{i\mathbf{1}} = x_i^2\frac{d}{dx_i}, \quad \mathbf{X}_{i\mathbf{2}} = x_i\frac{d}{dx_i}. \tag{40}$$

Соответствующая замена переменной, которая делает систему уравнений линейной, имеет вид: $y_i = -x_1^{-1}$.

Уравнение Риккати и задача оценивания состояния ДС

Факт наличия связи между решениями уравнения Риккати позволяет использовать его в целях уменьшения вычислительных затрат при реализации алгоритмов, в которых используется секционный принцип оценивания состояния динамической системы. Наличие связи между решениями, определяемой ангармоническим отношением, позволяет свести процедуру решения матричного ДУ Риккати к вычислению алгебраического выражения, связывающего три решения, полученных при различных начальных условиях, и начальным условием для последующего подынтервала, с четвертым решением. При этом необходимо отметить, что выбор трех начальных условий может быть произведен заранее и независимо от конкретно решаемой задачи, но для каждого подынтервала.

Применение данного подхода к решению конкретной задачи, рассмотрим на примере секционного метода номинальной траектории [7]. Уравнением Риккати, в данном случае, является ДУ, определяющее ошибку оценивания состояния ДС, которое имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)}) - \\ - \mathbf{P}\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{T}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_{x}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})\mathbf{P} + \mathbf{V}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})\mathbf{N}_{1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)}). \quad (41)$$

Каждой секции (подынтервалу) соответствуют свои значения матричных коэффициентов $\mathbf{f}_{x}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)}), \mathbf{H}_{x}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})$, и свой набор решений, которые связаны ангармоническим отношением. Таким образом, решение **P** на всем интервале наблюдения представляет сочленение решений, полученных на каждом подынтервале. При этом значение ошибки **P** на конце *i*-й секции, является начальным значением для другой. С учетом сказанного можно сделать следующий вывод: каждой секции можно сопоставить три решения и три константы. Когда алгоритм оптимального оценивания начинает работать, рекуррентное решение уравнения Риккати переходит из одной секции в другую. Но если использовать уже известные решения для каждой секции и новое начальное условие, то вместо рекуррентной процедуры, можно произвести просто однократный пересчет по алгебраической формуле, основанной на ангармоническом отношении, что значительно уменьшает вычислительные затраты. Резюмируя сказанное, алгоритм применения ангармонического отношения можно представить как последовательность операций:

1. Для произвольно выбранных трех начальных условий для каждого подынтервала рассчитываются соответственно три решения матричного уравнения Риккати, которые определим как опорные.

2. При изменении значений числовых матриц $\mathbf{f}_{x}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)}), \mathbf{H}_{x}(\overline{\mathbf{x}}^{(i)})$, связанных с переходом к новому подынтервалу, в качестве начального значения на нем выбирается значение ошибки оценивания, полученное на конце предыдущего подынтервала.

3. На основании трех опорных решений, соответствующих новому подынтервалу и значению ошибки оценивания вычисленной на конец предыдущего подынтервала (начальное условие), рассчитывается новое решение уравнения Риккати, соответствующее этому подынтервалу.

Ангармоническое отношение может быть применено не только при вычислении корреляционной матрицы оценивания, но и при вычислении номинальных траекторий при представлении динамических систем квадратичными сплайнами.

Заключение

Использование ангармонического отношения при решении задачи оценивания состояний динамических систем (или задач фильтрации и обнаружения в обработке сигналов) позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты. В частности, этот подход может быть использован при построении фильтров второго порядка, а также фильтров, использующих кусочно-квадратичной аппроксимацию и аппроксимацию квадратичными сплайнами.

Литература

1. Современный групповой анализ: методы и приложения. Группы Ли-Беклунда и квазилинейные системы / Э.А. Вартапетян [и др.]. – Л.: ЛИАН, препринт № 106, 1989. – 63с.

2. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований математичесской физики / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

3. Бутырский, Е. Ю. Ангармоническое отношение для матричного уравнения Риккати / Е.Ю. Бутырский // Труды научно-технической конференции «Военная радиоэлектроника». Петродворец, ВМИРЭ им. А. С. Попова, 2001. – С. 12–13.

4. Зеликин, М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении / М.И. Зеликин. – М.: Факториал, 1998. – 350 с.

5. Ленг, С. SL2(R) / С. Ленг. – М.: Мир, 1977. – 430с.

6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831с.

7. Бутырский, Е. Ю. Методы субоптимальной фильтрации / Е.Ю. Бутырский // Информатика и Космос. – 2006. – № 4. – С. 38–49.