Квазиоптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов при отсутствии ограничений на вид траектории в орбитальной относительной системе координат

Quasioptimal Control of Mutual Maneuver of Spacecrafts in the Absence of Restrictions on the Trajectory Form in the Relative Orbital Coordinate System

Гончаревский /Goncharevsky V.
Вилен Степанович
(vilenstepan@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая
академия имени А.Ф. Можайского» МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: взаимный маневр – mutual maneuver; энергетические затраты – energy costs; относительная система координат – relative coordinate system.

При проектировании систем и комплексов, обеспечивающих выполнение взаимного маневра космических аппаратов, большой практический интерес представляет отыскание квазиоптимальных программ управления этим маневром. Такие программы близки к оптимальным по заданному показателю качества, но более просты с точки зрения их технической реализации. В статье рассматривается один из возможных путей разработки квазиоптимальных по энергетическим затратам программ управления маневром. Получены алгоритмы расчета этих программ при отсутствии ограничений на вид траектории маневра в орбитальной относительной системе координат.

When designing systems and complexes providing execution of mutual maneuver of spacecrafts, finding of suboptimal control programs for this maneuver is of great practical interest. Such programs are close to optimal ones by the given quality indicator, but are simpler in terms of their technical implementation. The article describes one of the possible ways for the development of suboptimal in energy costs maneuver control programs. Algorithms for calculation of these programs in the absence of restrictions on the trajectory form in the relative orbital coordinate system are developed.

Для инженерной практики большой интерес представляет отыскание энергетически квазиоптимальных программ управления взаимным маневром (ВМ) космических аппаратов (КА). Под этими программами понимаются программы, близкие к оптимальным программам по величине энергетических затрат (ЭЗ) на выполнение ВМ, но более простые с точки зрения их технической реализации. Возможны различные пути разработки таких программ. Один из них может быть предложен на базе использования некоторых новых теоретических результатов, полученных в последние десятилетия в области вариационного исчисления. Так в ряде работ было показано, что если в уравнении Эйлера-Пуассона пренебречь малыми членами порядка ε (ε<<1), но сохранить их в соответствующих уравнениях дифференциальных связей, то величина искомого функционала, вычисленного без отбрасывания этих членов, будет отличаться от действительного экстремума на порядок ε^2.

Для функционала

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \vec{u}_{\Pi}^2 d\tau, \qquad (1)$$

который характеризует ЭЗ на выполнение программы управления $\vec{u}_{\Pi}$, и дифференциальных связей

$$\vec{u} = \vec{Q} - A\vec{R} - B\vec{V}, \qquad (2)$$

описывающих управляемое относительное движение (ОД) космических аппаратов [1...3], уравнение Эйлера-Пуассона, записанное в векторно-матричной форме, имеет в общем случае вид

$$d^2\vec{Q}/d\tau^2 + Kd\vec{Q}/d\tau + L\vec{Q} + M\vec{V} + N\vec{R} = 0. \qquad (3)$$

В соотношениях (1...3): $\vec{R}$ – вектор относительного положения; $\vec{V}$ – вектор относительной скорости космических аппаратов; $\vec{Q} = d\vec{V}/d\tau$; τ – текущее безразмерное время управления взаимным маневром КА; τ_0 и τ_k – моменты его начала и окончания; A и B – квадратные матрицы коэффициентов, вид которых определяется

типом относительной системы координат (ОСК), в которой рассматривается движение, а квадратные матрицы K, L, M, N размерности 3×3 представляют собой матрицы коэффициентов скалярных уравнений Эйлера-Пуассона и выражены через матрицы A, B следующим образом:

$$K = B^T - B;\ L = (\dot{B} - A)^T - A - 2\dot{B} - B^T B;$$
$$M = -2\dot{A} - \ddot{B} - B^T(A + \dot{B}) - (\dot{B} - A)^T B;$$
$$N = -\ddot{A} - B^T \dot{A} - (\dot{B} - A)^T A, \qquad (4)$$

где индексы «·» и «T» обозначают дифференцирование по τ и транспонирование.

Если проанализировать уравнение (3), то можно установить, что все его члены, содержащие производные от фазовых координат третьего порядка и ниже, физически обусловлены действием разностного гравитационного ускорения и кориолисовыми силами. Если время выполнения маневра $T=\tau_k-\tau_0$ и начальное рассогласование по относительной дальности сравнительно невелики, то влияние этих членов остается незначительным на протяжении всего временного интервала $\tau_0 < \tau < \tau_k$, и, следовательно, ими можно в первом приближении пренебречь. Уравнение (3) в результате этого существенно упрощается и, следовательно, значительно более простой вид приобретают экстремаль $\vec{R}(\tau_э)$ и квазиоптимальная вектор-функция управления $\vec{U}(\tau)$, которая получается в результате подстановки этой экстремали в уравнение дифференциальных связей (2). При этом очень важно следующее обстоятельство: сделанное выше допущение не сказывается на точности маневра, так как управление $\vec{U}(\tau)$ определяется из полного уравнения (2), т.е. из динамической модели ОД, учитывающей как разностное гравитационное, так и кориолисово ускорение. Данное допущение приводит только к некоторому увеличению ЭЗ при реализации квазиоптимальной программы по сравнению с их оптимальными значениями, т.е. к некоторому увеличению значения функционала (1).

Уравнение Эйлера-Пуассона (3) после отбрасывания членов, определяемых разностным гравитационным и кориолисовым ускорениями, принимает вид

$$d^2\vec{Q}/d\tau^2 = \vec{R}^{IV} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Общее решение векторного уравнения (5):

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^{4} \vec{C}_n \tau^{\ n-1}, \qquad (6)$$

где $\vec{C}_n = [C_{nri}]^{1\times 3}$.

Значение вектора произвольных постоянных $\vec{C}_n$ определяется краевыми условиями

$$\vec{R}(\tau_0) = \vec{R}_0,\ \vec{V}(\tau_0) = \vec{V}_0,$$
$$\vec{R}(\tau_k) = \vec{R}_k,\ \vec{V}(\tau_k) = \vec{V}_k. \qquad (7)$$

Используя выражения для экстремали (6) и её первой производной, а также условия (7), после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений получаем

$$\vec{C}_1 = \vec{R}_0,\ \vec{C}_2 = \vec{V}_0,$$
$$\vec{C}_3 = -[3(\vec{R}_0 - \vec{R}_k) + (2\vec{V}_0 + \vec{V}_k)T]/T^2,$$
$$\vec{C}_4 = [2(\vec{R}_0 - \vec{R}_k) + (\vec{V}_0 + \vec{V}_k)T]/T^3. \qquad (8)$$

где $\tau_0 = 0$.

Таким образом, искомая экстремаль, доставляющая квазиминимум функционалу (1) при заданных краевых условиях, определяется соотношением (6). Подстановка этого соотношения и его производных в правую часть уравнения (2) даёт квазиоптимальную программу управления

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{4} \vec{A}_n \tau^{n-1}, \qquad (9)$$

где

$$\vec{A}_1 = 2\vec{C}_3 - B\vec{C}_2 - A\vec{C}_1,\ \vec{A}_2 = 6\vec{C}_4 - 2B\vec{C}_3 - A\vec{C}_2,$$
$$\vec{A}_3 = -3B\vec{C}_4 - A\vec{C}_3,\ \vec{A}_4 = -A\vec{C}_4.$$

Подставляя уравнение (9) в соотношение (1) и выполняя интегрирование, получим следующее выражение для показателя расхода энергии

$$I = \sum_{k=1}^{7} S_k T^k, \qquad (10)$$

$$S_1 = \vec{A}_1^2,\ S_2 = \vec{A}_1\vec{A}_2,$$
$$S_3 = (\vec{A}_2^2 + 2\vec{A}_1\vec{A}_3)/3,\ S_4 = (\vec{A}_1\vec{A}_4 + \vec{A}_2\vec{A}_3)/2,$$
$$S_5 = (\vec{A}_3^2 + 2\vec{A}_2\vec{A}_4)/5,\ S_6 = \vec{A}_3\vec{A}_4\ /\ 6,\ S_7 = \vec{A}_4^2\ /\ 7.$$

Соотношения (9), (10) определяют квазиоптимальную программу и соответствующий ей показатель ЭЗ в общем виде. Они справедливы при линейной динамической модели ОД для любой ОСК, в которой рассматривается это движение, для любой орбиты пассивного КА, с которым связано начало данной ОСК, и для различных видов ВМ.

Рассмотрим, какой конкретный вид будут иметь эти соотношения, если начальные орбиты КА компланарны, и выполняется маневр сближения, а ОД описывается в наиболее широко используемой орбитальной ОСК. В этом случае программная траектория будет иметь вид

$$x = C_{1x} + C_{2x}\tau + C_{3x}\tau^2 + C_{4x}\tau^3,$$
$$y = C_{1y} + C_{2y}\tau + C_{3y}\tau^2 + C_{4y}\tau^3. \qquad (11)$$

Если выполняется маневр сближения с мягким контактом и начальные орбиты КА близки к круговым, то

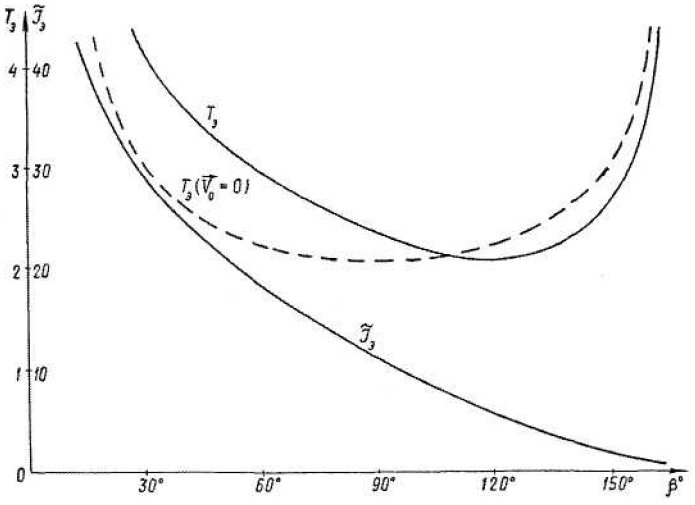

Рис. 1

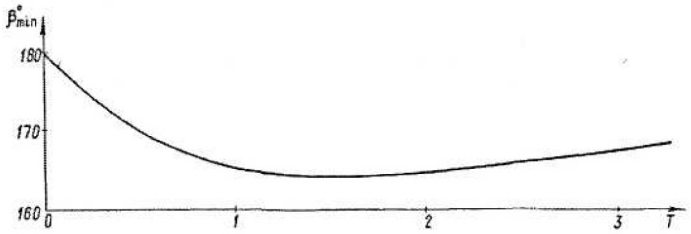

Рис. 2

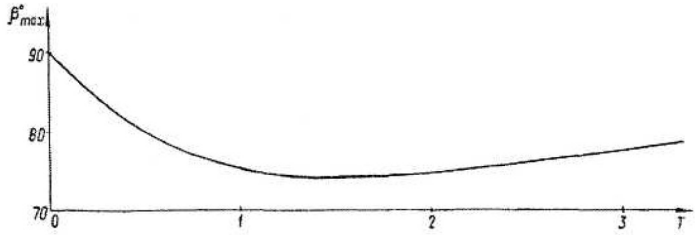

Рис. 3

$$\tilde{C}_{1x} = \mathrm{ctg}\beta, \quad \tilde{C}_{2x} = 3/2, \quad \tilde{C}_{3x} = -3T^{-2}\mathrm{ctg}\beta - 3T^{-1},$$
$$\tilde{C}_{4x} = 2T^{-3}\mathrm{ctg}\beta + 1,5T^{-2}, \tilde{C}_{1y} = 1, \tilde{C}_{2y} = 0, \tilde{C}_{3y} = -3T^{-2},$$
$$\tilde{C}_{4y} = 2T^{-3}.$$

(здесь и в дальнейшем индекс «~» означает нормирование по начальной разности высот орбит аппаратов y_0).

Квазиоптимальные управляющие функции, обеспечивающие движение по программной траектории (11)

$$\tilde{U}_x = \sum_1^4 \tilde{A}_{ix}\tau^{i-1}, \quad \tilde{U}_y = \sum_1^4 \tilde{A}_{iy}\tau^{i-1}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{A}_{1x} = -6T^{-2}\mathrm{ctg}\beta - 6T^{-1}, \quad \tilde{A}_{2x} = 12T^{-3}\mathrm{ctg}\beta + 21T^{-2},$$
$$\tilde{A}_{3x} = -12T^{-3}, \quad \tilde{A}_{4x} = 0, \quad \tilde{A}_{1y} = -6T^{-2},$$
$$\tilde{A}_{2y} = 12(T^{-3} - T^{-2}\mathrm{ctg}\beta - T^{-1}),$$
$$\tilde{A}_{3y} = 12T^{-3}\mathrm{ctg}\beta + 18T^{-2}, \quad \tilde{A}_{4y} = -6T^{-3}.$$

Показатель ЭЗ $\tilde{I} = \int_{\tau_0}^{\tau_k} (\tilde{U}_x^2 + \tilde{U}_y^2)d\tau$ на реализацию управлений (12) согласно соотношению (10)

$$\tilde{I} = 12(1 + \mathrm{ctg}^2\beta)T^{-3} + (7,2 + 18T^{-2})\mathrm{ctg}\beta +$$
$$+(9 + 4,8\mathrm{ctg}^2\beta)T^{-1} + 96T/35. \tag{13}$$

Оптимальное начальное направление маневра, полученное в результате решения уравнения $\partial\tilde{I}/\partial\mathrm{ctg}\beta = 0$, определяется соотношением $\mathrm{ctg}\beta_э = -3T/4$. При выполнении маневра с этого направления $\tilde{I} = 3T/70 + 2,25T^{-1} + 12T^{-3}$. Данная величина имеет минимум-миниморум при $T_э \cong 8,08$. Оптимальное время сближения с данного направления β можно рассчитать по итерационному соотношению

$$T_э = [32T_э^4/35 - 12(1 + \mathrm{ctg}^2\beta) -$$
$$-(3 + 1,6\mathrm{ctg}^2\beta)T_э^2]/12\mathrm{ctg}\beta, \tag{14}$$

найденному из условия $\partial\tilde{I}/\partial T = 0$.

На рис. 1 представлены в виде графиков значения времени $T_э$, полученные по соотношению (14), и значения показателя $\tilde{I}_э$, соответствующие этому времени, в функции угла β. Время $T_э$ уменьшается с ростом β, достигает минимума $T_{э\,\min} \cong 2,1$ при β а затем начинает увеличиваться. Показатель ЭЗ также уменьшается с увеличением β, при $T_{э\,\min}$ он равен 6 и достигает минимального значения 0,647 при $T_э$=8,08 и β ≅ 170,5°. Пунктирная линия на рис. 1 показывает аналогичную зависимость $T_э = T_э(\beta)$ при нулевых начальных условиях по скорости. Экстремальные начальные направления при неизменной начальной дальности определяются из соотношения $\mathrm{ctg}2\beta_э = -39T/70 - 1,2T^{-1}$.

На рис. 2, 3 изображены зависимости экстремальных направлений $\beta_{\min}$ и $\beta_{\max}$, при которых показатель ЭЗ соответственно минимален или максимален, от времени T. Видно, что $\beta_{\min}$ с ростом T сначала уменьшается и достигает минимума при $T \cong 1,47$, а затем начинает увеличиваться, стремясь к 90°.

Отметим, что практическая ценность полученных здесь значений $T_э$, $\beta_э$ и $I_э$ состоит еще в том, что они позволяют сравнительно быстро дать приближенную оценку аналогичных параметров, имеющих место при использовании непрерывного оптимального управления в задачах с динамическими моделями ОД, учитывающими разностное гравитационное и кориолисово ускорение. Моделирование квазиоптимальных программ показало также, что увеличение ЭЗ на их реализацию при $T \le 2$ не превышает 8...10% от оптимальных значений.

Литература

1. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – МО РФ, 1998. – 87с.

2. Гончаревский, В. С. Энергетически квазиоптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов / В.С. Гончаревский //Информация и Космос. – 2012. – № 1. – С.102–104.

3. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.