Принцип баланса «комплексных вероятностей» при моделировании нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний

The Principle of "Complex Probabilities" Balance, Applied to Simulation of Non-Stationary Service Systems Represented by the Cyclic Graph of States

Гусеница / Gusenitsa Y.
Ярослав Николаевич
(yaromir226@mail.ru)
кандидат технических наук.
ФГБОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского»
(ВКА им. А. Ф. Можайского) МО РФ,
преподаватель кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Новиков / Novikov A.
Александр Николаевич
(novalloll@mail.ru))
кандидат технических наук.
ВКА им. А. Ф. Можайского,
доцент кафедры метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: система обслуживания – service system; «комплексная вероятность» состояния – "complex probability" of state; изображение Лапласа – Laplas transform; баланс состояний – balance of states; система уравнений – system of equations; вероятность во временной области – probability within the time domain.

Предложен вероятностный принцип баланса для состояний системы обслуживания. Составлена и решена система уравнений баланса в комплексной области с применением изображений Лапласа. Выполнено обратное преобразование Лапласа для перехода от изображений к вероятностям во временной области. Принцип рекомендован для исследования нестационарных систем обслуживания при произвольных распределениях.

A probabilistic balance principle for queuing system states is proposed. A system of balance equations in the complex domain is compiled and solved using Laplace images. Inverse Laplace transformation is performed in order to transit from images to probabilities within the time domain. The principle is recommended for study of non-stationary service systems in case of arbitrary distributions.

Введение

Впервые термин «комплексные вероятности» используется в статье D. R. Cox [1]. Во вводной статье И. Н. Коваленко к книге Дж. Риордана «Вероятностные системы обслуживания» [2] отмечается, что «...применив метод «комплексных вероятностей» Кокса, мы можем охватить случай, когда плотность длительности обслуживания при $x > 0$ задается любой функцией вида

$$p(x) = \sum_i C_i x^{r_i} e^{-\lambda_i x},$$

лишь бы она была неотрицательной и имела интеграл, равный 1». Далее им отмечается, что любые законы распределения длительности обслуживания допускают аппроксимацию суммой экспонент с полиномиальными множителями. Эта идея была применена в статье [3] при разложении распределений вероятностей на сумму экспоненциальных плотностей с комплексными сопряженными коэффициентами и параметрами с целью решения исследования немарковских процессов. В статье [4] изучается вопрос о вероятностном анализе комплексной переменной с введением комплексной дельта-функции Дирака. В статье [5] дается строгое обоснование комплексных функций Хевисайда и Дирака и приводится численный пример приложения дельта-функции к исследованию альтернирующего случайного процесса с накоплением и потерей информации. В статьях [6] и [7] приведены примеры практического применения описанных выше методов аппроксимации для оценивания надежности программного обеспечения при ограниченном объеме испытаний. В статье [8] предложены немарковская модель и метод расчета стационарных вероятностей состояний нестационарных систем обслуживания, представляемых разомкнутым графом состояний. В их основу положены использование «комплексных вероятностей» состояний в виде изображений Лапласа и принцип вероятностного баланса состояний системы. Даны рекомендации о возможности учета различных видов временных задержек и достоверности контроля в системе.

В данной работе рассматривается вопрос о возможности исследования нестационарных систем обслуживания, представленных не разомкнутым, а замкнутым, циклическим графом состояний.

Принцип баланса

Исследователи различных по назначению и принципам действия систем, но применяющие вероятностные методы, часто привлекают для достижения своих целей аппарат дифференциальных или интегральных уравнений. Во многих случаях рассматриваются марковские, полумарковские случайные процессы. Если необходимо рассматривать немарковские процессы, то на помощь могут приходить различные способы сведения немарковских процессов к марковским. Одним из таких способов является применение аппроксимации распределений вероятностей, на основе которой составляются и решаются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если рассмотреть соответствующий граф состояний марковского процесса, то можно заметить, что стационарная вероятность нахождения процесса в неначальном состоянии может быть найдена из условия вероятностного баланса. Под балансом понимается равенство сумм произведений интенсивностей на вероятности состояний, являющихся отправителями заявок (начальными вершинами дуг графа состояний), и сумм произведений интенсивностей на вероятности состояний, являющимися получателями заявок (конечными вершинами дуг графа состояний). Иначе говоря, состояние процесса определяется как равновесное, когда среднестатистические характеристики входящих и выходящих случайных потоков взаимно уравновешиваются. Именно это мы называем статистическим или вероятностным балансом состояний. Полученные уравнения для состояний процесса необходимо решить, чтобы найти стационарные вероятности состояний. Во временной области математическая формализация основывается на действиях умножения независимых интенсивностей и вероятностей и сложении полученных произведений несовместных событий состояний процесса.

Обратимся к аналогу этого формального процесса не во временной, а в комплексной области и привлечем для этой цели преобразование Лапласа, которое широко используется в прикладных задачах.

Предположим, что для исследуемой системы каким-то образом была получена система дифференциальных или интегральных уравнений, описывающая происходящий в ней вероятностный процесс. Если к ней применить преобразование Лапласа, то можно ее представить как систему алгебраических уравнений, которая решается достаточно просто. Далее предположим, что интерес представляет только ее стационарное решение. Тогда временные характеристики – вероятности состояний – нужно заменить их изображениями в преобразовании Лапласа. Попаданию системы в некоторое состояние предшествует суммирование случайных временных интервалов траектории случайного процесса. В преобразовании Лапласа их суммирование представляется соответствующим произведением изображений плотностей вероятностей. Таким образом, для составления уравнений баланса состояний необходимо использовать соответствующие произведения изображений с их последующим суммированием. Вопрос об эквивалентности двух различных рассматриваемых балансов с целью корректности решения прикладных задач, на наш взгляд, очевиден и в проверке не нуждается.

Не будем приводить общую математическую формализацию рассматриваемой задачи, а только ограничимся примером сравнительно простой структуры.

Пример использования принципа баланса

Пусть требуется найти вероятности состояний двухфазного немарковского процесса, граф переходов которого изображен на рис 1. Составим для графа на рис. 1 систему уравнений баланса.

Получаем:

$$\begin{aligned} &a^*(s)P_0^*(s) = \beta b^*(s)P_1^*(s);\\ &(\alpha a^*(s) + \beta b^*(s))P_1^*(s) = a^*(s)P_0^*(s) + b^*(s)P_2^*(s);\\ &b^*(s)P_2^*(s) = \alpha a^*(s)P_1^*(s). \end{aligned} \tag{1}$$

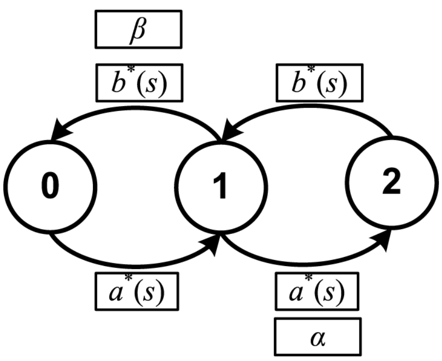

Рис. 1. Граф состояний и переходов нестационарной системы обслуживания

Принимая во внимание условие нормирования изображений вероятностей

$$\sum_{i=0}^{2} P_i^*(s) = \frac{1}{s}$$

и решая систему уравнений (1), получаем:

$$P_0^*(s) = \frac{\beta(b^*(s))^2}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]};$$
$$P_1^*(s) = \frac{a^*(s)b^*(s)}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]};$$
$$P_2^*(s) = \frac{\alpha(a^*(s))^2}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]}. \qquad (2)$$

Символы $*$ и s означают изображение и комплексную переменную Лапласа.

Представим следующие исходные данные:

– распределение времени между поступающими требованиями нормальное с плотностью вероятности

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

и параметрами $m = 20$ ч, $\sigma = 5$ ч;

– распределение времени обслуживания требований также нормальное с плотностью вероятности

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} e^{-\frac{(n-t)^2}{2\theta^2}}$$

и параметрами $n = 15$ ч, $\theta = 3$ ч.

Соответствующие им функции распределений обозначим через $A(t)$ и $B(t)$. Используя их, определим условные вероятности переходов при ветвлении случайного процесса из состояния 2 графа на рис. 1:

$$\alpha = \int_0^{\infty} (1 - B(z))dA(z) = 0{,}196;$$
$$\beta = \int_0^{\infty} (1 - A(z))dB(z) = 0{,}804. \qquad (3)$$

Изображения Лапласа плотностей вероятностей найдем, используя гипердельтную аппроксимацию нормальной плотности по четырем начальным моментам, приведенную в [9]. Она представляется в виде

$$f_{н.ап.}(t) = \frac{1}{2}(\delta(t - m - \sigma) + \delta(t - m + \sigma)), \qquad (4)$$

где δ дельта-функция Дирака;

m и σ – параметры аппроксимируемого распределения.

Применяя данную формулу (4), получаем аппроксимационные формулы плотностей вероятностей:

$$a(t) \approx \frac{1}{2}(\delta(t-15) + \delta(t-25));$$
$$b(t) \approx \frac{1}{2}(\delta(t-12) + \delta(t-18)). \qquad (5)$$

В изображениях Лапласа они принимают вид:

$$a^*(s) = \frac{1}{2}(e^{-15s} + (e^{-15s})^{\frac{5}{3}});$$
$$b^*(s) = \frac{1}{2}(e^{-12s} + (e^{-12s})^{\frac{3}{2}}). \qquad (6)$$

Подставляя формулы (6) в уравнения (1), получаем их в развернутом виде для приведенных числовых данных примера. Чтобы получить выражения для вероятностей состояний во временной области, необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Однако достичь ожидаемых результатов достаточно затруднительно из-за сложности прямых изображений Лапласа искомых вероятностей и вычислительных трудностей работы с нормальными распределениями. Поэтому переход от изображений $P_0^*(s), P_1^*(s), P_2^*(s)$ к оригиналам $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ произведем, применяя приближенный способ обращения преобразования Лапласа с использованием формулы Алфрея. Эта формулу вытекает из формулы Уайдера на основе свойства фильтрации преобразования Лапласа с помощью дельта-функции. Она имеет следующий вид [9]:

$$f(t) \approx s f^*(s) \text{ при } s = \frac{1}{t}. \qquad (7)$$

В результате применения формулы (7) получим выражения для вероятностей состояний процесса:

$$P_0(t) = \frac{0{,}804 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right) + 0{,}804 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2 + 0{,}196 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right)^2};$$

$$P_1(t) = \frac{\left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right) + 0{,}804 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2 + 0{,}196 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right)^2};$$

$$P_2(t) = \frac{0{,}196 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right)^2}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right) + 0{,}804 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2 + 0{,}196 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}}\right)^{\frac{5}{3}}}{2}\right)^2}.$$

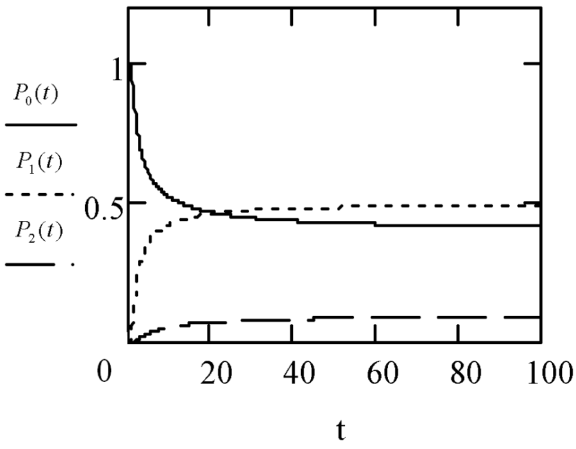

Рис. 2. Численные результаты моделирования

Численные результаты представлены в виде кривых вероятностей на рис. 2.

Из полученных аналитических выражений для данных вероятностей можно найти их стационарные значения.

В условиях примера они равны

$$P_0(\infty) = 0{,}402;$$
$$P_1(\infty) = 0{,}5;$$
$$P_2(\infty) = 0{,}098.$$

Значения начальных вероятностей равны

$$P_0(0{,}05) = 1;$$
$$P_1(0{,}5) = 0;$$
$$P_2(0{,}05) = 0.$$

Заключение

В данной статье рассмотрен метод расчета стационарных вероятностей состояний систем обслуживания, представленных графом с обратными связями. Для таких циклических систем обслуживания вместо традиционного использования систем дифференциальных или интегральных уравнений в теории случайных процессов предложено использовать алгебраические уравнения с записью вероятностей состояний в изображениях Лапласа.

Рекомендован принцип вероятностного баланса для состояний системы обслуживания в изображениях Лапласа. Записаны и решены уравнения баланса состояний в изображениях с последующим переводом решений из комплексной области во временную область. Метод проиллюстрирован численным примером.

Результаты статьи могут быть применены для исследования многоциклических стационарных и нестационарных систем обслуживания, а также переходных процессов, протыкаемых в них. Они также приемлемы для систем с различными видами временных задержек в их элементах, а также при учете контроля и необходимости оценивания его достоверности.

Литература

1. Cox, D. R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes / D.R. Cox // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – Vol. 51. – P. 313–319.

2. Риордан, Дж. Вероятностные системы обслуживания : [пер. с англ.] / Дж. Риордан. – М.: Связь, 1966. – 184 с.

3. Смагин, В. А. Об одном методе исследования немарковских систем / В.А. Смагин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1983. – № 6. – С. 31–36.

4. Смагин, В. А. Вероятностный анализ комплексной переменной / В.А. Смагин // Автоматика и вычислительная техника. – 1999. – № 5. – С. 3–13.

5. Smagin, V. Complex Delta Function and Its Information Application / V. Smagin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2014. – Vol. 48. – No. 1. – P. 10–16.

6. Гусеница, Я. Н. Модификация динамической модели Липова для оценивания надежности программного обеспечения автоматизированных систем управления войсками и оружием при ограниченном объеме испытаний / Я.Н. Гусеница // Сб. тр. Всероссийской НТК «Теоретические и прикладные проблемы развития и совершенствования автоматизированных систем управления военного назначения». Т. 1. Ч. 2 – СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2014. – С. 126–132.

7. Гусеница, Я. Н. Обобщенная модель разнотипных программных ошибок для оценивания надежности программного обеспечения / Я.Н. Гусеница // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2015. – Т. 7. – № 5. – С. 18–23.

8. Смагин, В. А. К вопросу моделирования одноканальных нестационарных систем с произвольными распределениями моментов времени поступления заявок и длительностей их обслуживания / В.А. Смагин, Я.Н. Гусеница // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. – 2015. – Вып. 649 – С. 56–63.

9. Смагин, В. А. Немарковские задачи теории надежности / В.А. Смагин В.А. – Л.: МО СССР, 1982. – 269 с.