Алгоритм расчета импульсной программы управления угловым разворотом космического аппарата

Computing Algorithm for Impulse Program of Managing Angular Turn of Spacecraft

Миронов / Mironov V.
Вячеслав Иванович
(mironuv@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор.
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор.
г. Санкт-Петербург

Зоткин / Zotkin M.
Максим Юрьевич
(max053@yandex.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: космический аппарат – spacecraft; метод приближенного корректирующего оператора – method of approximate adjustment operator; параметры Родрига-Гамильтона – Rodrigues-Hamilton parameters; метод Ньютона – Newton method; углы Эйлера – Euler's angles.

В работе рассматривается задача определения импульсной программы управления пространственным угловым разворотом космического аппарата с использованием кинематических уравнений в параметрах Родрига-Гамильтона. Предложенный алгоритм расчета базируется на применении метода приближенного корректирующего оператора. Данный метод позволяет использовать упрощенные алгоритмы приближенного расчета управления в схеме численного решения полной задачи. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие сходимость и высокую экономичность с вычислительной точки зрения.

The study considers the problem of formulating the impulse program for managing angular turn of spacecraft using kinematic equations expressed via the Rodrigues-Hamilton parameters. The suggested computational algorithm is based on using the method of approximate adjustment operator. Such a technique enables one to use simplified algorithms for approximate computing of management within the scheme of numerical solution of complete problem. Computation results are presented to illustrate convergence and high computer resource saving features of the technique.

Введение

Современный этап развития космической техники характеризуется интенсивным ростом числа создаваемых и запускаемых на орбиту космических аппаратов (КА). При этом наземные средства не способны обеспечить достаточной информацией о назначении запускаемых КА, их классификационных признаках и особенностях целевого функционирования. Возникают задачи, которые могут быть успешно решены средствами космического базирования. В настоящее время активно проводятся широкие исследования по созданию космических аппаратов, предназначенных для наблюдения орбитальных объектов. Одна из задач, которые необходимо решить такому КА, – это мгновенный угловой разворот в направлении орбитального объекта. Поэтому при создании таких КА важную роль занимают вопросы разработки алгоритмов углового движения. В работе предлагается более экономичный в вычислительном отношении алгоритм решения, основанный на применении метода приближенного корректирующего оператора (ПКО). Данный метод позволяет использовать упрощенные алгоритмы приближенного расчета управления в схеме численного решения полной задачи. Получаемые с помощью этого метода программы управления являются квазиоптимальными с точки зрения удовлетворения условиям оптимальности и обеспечивают выполнение краевых условий наведения с любой заданной точностью.

Расчет импульсной программы управления угловым разворотом несимметричного космического аппарата

При решении задач управления угловым движением КА необходимо определить соответствующие параметры – импульсы угловой скорости $\Delta\overline{\omega}_1, \Delta\overline{\omega}_2$, обеспечивающие разворот КА из начального углового положения $\overline{\alpha}_1, \overline{\omega}_1$ в требуемое угловое положение $\overline{\alpha}_2, \overline{\omega}_2$ за заданное время $T_{зад}$. Поставленные задачи управления являются краевыми для соответствующей модели динамики управления и граничных условий.

Решение краевой задачи сводится к решению краевого уравнения:

$$\overline{X}(\overline{X}_0, T) = X_T$$

При решении задачи необходимо использовать следующие уравнения углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона, так как они не вырождаются в любом положении объекта и отличаются малым числом независимых параметров [1]:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = \frac{1}{2}\left(0\ p_0 - \omega_x\ p_1 - \omega_y\ p_2 - \omega_z\ p_3 \right), \\ \dot{p}_1 = \frac{1}{2}\left(\omega_x\ p_0 + 0\ p_1 - \omega_y\ p_2 - \omega_z\ p_3 \right), \\ \dot{p}_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_y\ p_0 - \omega_z\ p_1 + 0\ p_2 + \omega_x\ p_3 \right), \\ \dot{p}_3 = \frac{1}{2}\left(\omega_z\ p_0 + \omega_y\ p_1 - \omega_x\ p_2 + 0\ p_3 \right). \end{cases} \quad (1)$$

где p_0, p_1, p_2, p_3 – параметры Родрига-Гамильтона.

Так как КА является несимметричным, то динамические уравнения Эйлера принимают следующий вид [2]:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \dfrac{I_y - I_z}{I_x}\omega_y\omega_z, \\ \dot{\omega}_y = \dfrac{I_z - I_x}{I_y}\omega_x\omega_z, \\ \dot{\omega}_z = \dfrac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x\omega_y. \end{cases} \quad (2)$$

Задачи такого рода обычно решают итерационным методом Ньютона. Соответствующая вычислительная схема расчета управления имеет следующий известный вид [3]:

$$\overline{u}_{k+1} = \overline{u}_k - \left[\frac{\partial \overline{S}}{\partial \overline{u}}\right]_k^{-1} \cdot \overline{S}(\overline{u}_k)\ , \qquad k = 0,1,2...,$$

где $\overline{S}(\overline{u}_k)$ – промах в k-й итерации.

$$\overline{S} = \overline{x}(\overline{p}_k, T) - \overline{x}_T.$$

Однако реализация метода Ньютона требует выполнения сравнительно большого объема вычислений в связи с необходимостью дополнительного интегрирования уравнений движения для расчета соответствующих матриц частных производных на каждой итерации.

Важное значение для повышения быстродействия алгоритмов управления имеют конструктивные методы решения краевых задач. Значительными возможностями в этом отношении обладает метод приближенного корректирующего оператора, обоснованный в [4]. Согласно этому методу для решения нелинейных уравнений вида:

$$A(\overline{q}) = \overline{p}_T,$$

где оператор A определен неявно на процедурах интегрирования дифференциальных уравнений, применяется вычислительный процесс

$$\overline{q}_{k+1} = M\left[\overline{p}_T - \sum_{i=0}^{k} \overline{\Delta}(\overline{q}_i) \right],$$

где

$$\overline{\Delta}(\overline{q}_i) = A(\overline{q}_i) - \overline{p}_T.$$

Здесь

$$M\left[\bullet\right] = A_1^{-1}[\bullet]$$

есть приближенный корректирующий оператор, выражающий алгоритм решения приближенного уравнения

$$A_1(\overline{q}) = \overline{p}_T.$$

Выбор приближенного уравнения и оператора M может быть осуществлен множеством различных способов в конкретной ситуации с учетом специфики исходной задачи. Для этого могут применяться как формальные приемы упрощения исходных моделей, так и методы их аппроксимации и приближенного решения.

Важной особенностью метода ПКО является то обстоятельство, что для каждой итерации значение $A(\overline{q})$ вычисляется один раз. Применительно к рассматриваемой в данной работе задаче управления это означает, что для очередного уточнения вектора неизвестных параметров дифференциальные уравнения краевой задачи интегрируются один раз. Таким образом обеспечивается высокая экономичность вычислений.

Условия сходимости рассматриваемого вычислительного процесса устанавливаются на основе известного принципа сжатых отображений [4]. Для того чтобы реализовать данный метод при решении поставленной задачи расчета импульсной программы управления угловым разворотом несимметричного КА, необходимо сформировать соответствующий приближенный корректирующий оператор. В работе в качестве такого оператора принят алгоритм импульсной программы управления угловым разворотом симметричного КА, который может быть представлен следующим образом:

1. Преобразование заданных начальных и конечных углов Эйлера в соответствующие параметры Родрига-Гамильтона по формулам [1]:

$$\begin{cases} p_0 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ p_1 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ p_2 = \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ p_3 = \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

2. Для симметричного КА, имеющего одинаковые главные моменты инерции по всем связанным осям, угловой разворот производится с постоянной угловой скоростью. В этом случае кинематические уравнения в параметрах Родрига-Гамильтона имеют следующее аналитическое решение [5]:

$$\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \cos(\omega t/2);$$

$$q_1 = q_x \cdot \sin(\omega t/2) = \frac{\omega_x}{\omega} \cdot \sin\frac{\omega t}{2};$$

$$q_2 = q_y \cdot \sin(\omega t/2) = \frac{\omega_y}{\omega} \cdot \sin\frac{\omega t}{2};$$

$$q_3 = q_z \cdot \sin(\omega t/2) = \frac{\omega_z}{\omega} \cdot \sin\frac{\omega t}{2}.$$

3. При заданных $\overline{p}(t_0) = \overline{p}_0$ и $\overline{p}(T) = \overline{p}_T$ задача сводится к определению $\overline{\omega}_П$ путем решения нелинейного векторного уравнения:

$$\overline{p}_T = \overline{a}\cos\frac{\omega_0 T}{2} + \frac{\sin\frac{\omega_0 T}{2}}{\omega_0} C\overline{\omega}_П,$$

где

$$\overline{a}(t_0) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \; \overline{C}(t_0) = \begin{pmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix},$$

ω_0 – модуль начальной угловой скорости,

$$\overline{\omega}_П = (\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})^T.$$

4. Нелинейное векторное уравнение разрешается относительно $\overline{\omega}_П$:

$$\overline{\omega}_{Пi} = C^{-1} \frac{(\overline{p}_T - \overline{a}\cos\frac{\omega_{0i} T}{2})\omega_{0i}}{\sin\frac{\omega_{0i} T}{2}},$$

где i – номер итерации. Данное уравнение решается методом простых итераций [3].

5. Для решения задачи необходимо определить начальное приближение для модуля начальной угловой скорости ω_{0i}. С этой целью обратимся к известной теории конечных поворотов твердого тела [5], согласно которой:

$$\omega_0 = \frac{2}{T}\arccos p_0(\mathrm{T}).$$

Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности.

6. После определения вектора $\overline{\omega}_П$ вычисляются начальные и конечные импульсы угловой скорости:

$$\Delta\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_П - \overline{\omega}_0,$$

$$\Delta\overline{\omega}_T = \overline{\omega}_T - \overline{\omega}_П.$$

Приведенный алгоритм рассматривается далее в качестве ПКО при решении задачи расчета импульсной программы управления угловым разворотом для несимметричного КА, имеющего различные главные моменты инерции по соответствующим осям.

Общая вычислительная схема расчета импульсной программы управления угловым разворотом несимметричного КА методом приближенного корректирующего оператора состоит в следующем:

1. Пересчет начальных и конечных значений углов Эйлера в соответствующие параметры Родрига – Гамильтона.

2. Расчет импульсной программы управления угловым разворотом по приведенному выше алгоритму ПКО.

3. Численное интегрирование кинематических (1) и динамических (2) уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка [3].

4. Определение промаха, соответствующего первому приближению по конечным значениям параметров.

5. Определение новой смещенной точки прицеливания и расчет уточненных значений параметров импульсной программы управления по алгоритму МПКО.

6. Далее вычисления повторяются до тех пор, пока не будет обеспечена требуемая точность расчетов.

Приведем в качестве примера некоторые результаты численных расчетов импульсной программы управления угловым разворотом несимметричного КА, полученные по исходным данным, приведенным в таблице 1. В этой таблице ψ – угол рыскания, ϑ – угол тангажа, γ – угол крена, J_i – моменты инерции по соответствующим осям, $\overline{\omega}$ – векторы начальной и конечной угловой скорости, T – время углового разворота.

В таблице 2 приведены результаты перевода начальных и конечных углов Эйлера в соответствующие параметры Родрига-Гамильтона:

Таблица 1

Исходные данные

ψ_0, град	ϑ_0, град	γ_0, град	ψ_T, град	ϑ_T, град	γ_T, град	J_x, $кг*м^2$	J_y, $кг*м^2$	J_z, $кг*м^2$	$\overline{\omega}(t_0)$ град/с	$\overline{\omega}(T)$ град/с	T, сек
1	1	0	28.4	22	0	206	117	233	0	0	15

Таблица 2

Перевод углов Эйлера в параметры Родрига-Гамильтона

$p_0(t_0)$	$p_1(t_0)$	$p_2(t_0)$	$p_3(t_0)$	$p_0(T)$	$p_1(T)$	$p_2(T)$	$p_3(T)$
0.9999	0.00007	0.0087	0.0087	0.9515	0.047	0.241	0.1854

Таблица 3

Значения импульсов угловой скорости по итерациям

Номер итерации	$\Delta\omega_x(t_0)$ рад/с	$\Delta\omega_y(t_0)$ рад/с	$\Delta\omega_z(t_0)$ рад/с	$\Delta\omega_x(T)$ рад/с	$\Delta\omega_y(T)$ рад/с	$\Delta\omega_z(T)$ рад/с
1	0.0064	0.0314	0.024	-0.00001	-0.0317	-0.0246
2	0.0096	0.0315	0.0234	-0.0032	-0.032	-0.0246
3	0.0096	0.0313	0.0231	-0.0032	-0.0319	-0.0242
4	0.0095	0.0313	0.0231	-0.0032	-0.0319	-0.0242

Таблица 4

Сходимость алгоритма управления

Номер итерации	$p_0(T)$	$p_1(T)$	$p_2(T)$	$p_3(T)$
1	0.9515	0.0232	0.2406	0.1904
2	0.9508	0.0474	0.2419	0.1876
3	0.9515	0.0474	0.2410	0.1853
4	0.9515	0.047	0.2410	0.1854

В таблице 3 представлены результаты расчетов управляющих импульсов угловой скорости в начальные и конечные моменты времени по итерациям метода ПКО. Эти данные иллюстрируют сходимость данного процесса.

В таблице 4 представлены расчетные данные иллюстрирующие сходимость алгоритма определения импульсной программы управления.

Исследования показали, что вычислительный процесс сходится за три–четыре итерации. На каждой итерации уравнения движения интегрируются один раз, что обеспечивает достаточно высокую оперативность расчетов.

Литература

1. Матвеев, В. В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2009. – 280 с.

2. Попов, В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов / В.И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.

3. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

4. Миронов, В. И. Синтез итерационных алгоритмов решения краевых задач и нелинейных уравнений / В.И. Миронов, Ю.В. Миронов, Р.М. Юсупов // Известия вузов. Приборостроение. – 2010. – Т. 53. – № 1. – С. 9–15.

5. Системы навигации и ориентации космических аппаратов / В.В. Смирнов [и др.]. – СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2007. – 155 с.