Определение гарантированной функции распределения величины кванта в задаче квантования информации

Defining the Guaranteed Distribution Function for Quantum Size in the Task of Information Quantification

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
действительный член МАИ.
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А. Ф. Можайского),
профессор кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Шерстобитов / Sherstobitov S.
Сергей Александрович
(radosti_yad@mail.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Ширямов / Shiryamov O.
Олег Анатольевич
(mood2@yandex.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: оптимальное квантование информации – optimal quantification of information; квант – quantum; математическое ожидание – expected value; функция распределения – distribution function; гарантированная вероятность – guaranteed probability; квантиль – quintile.

Решается задача определения функции распределения величины оптимального кванта информации при минимизации квантованной случайной величины количества информации в отличие от способа, при котором найденная величина кванта не является случайной.

The problem is solved of retrieving the distribution function of optimal size information quanta for minimizing the quantified random value of information amount in contrast to the technique yielding a non-random size of that quantum.

Введение

В статье «Оптимальное в смысле заполнения квантование информации» [1] поставлена и решена задача определения математического ожидания квантованной случайной величины, полученной в результате разделения её на кванты равной величины при условии, что между ними вводятся одинаковые пробелы заданной величины. При этом для размещения получающегося остатка от квантования предусматривается ещё один дополнительный квант. Для решения нелинейной задачи авторы используют критерий математического ожидания квантованной величины. Оптимальная величина кванта находится применением достаточно сложного оригинального численного алгоритма.

Следует отметить, что применение в качестве критерия оптимизации математического ожидания квантованной величины является достаточно грубым, так как оно характеризует только среднее значение случайной величины. Поэтому искомая величина оптимального кванта является также средней величиной и при решении практических задач может быть недостаточной.

Наиболее объективным критерием оценивания является вероятностная характеристика – функция распределения величины оптимального кванта. Однако непосредственные попытки решения данной задачи к желаемому результату не привели. Поэтому в данной статье предложен косвенный подход, основанный также на методе квантования случайной величины с заданным уровнем гарантии, определяющем величину квантиля отсечения слева и справа у плотности

вероятности случайной величины отрезков с заданной вероятностью [2].

Сущность метода и его формализация. Пусть требуется записать на ленту реализацию случайного количества информации $\hat{Z}$ с функцией распределения $F(z)$ совокупностью квантов, разделённых промежутками величиной c. Искомую величину кванта обозначим как x. Тогда согласно [1] математическое ожидание квантованной случайной величины $\hat{Z}$ записывается в виде:

$$M(x) = (x+c)\int_0^{\infty}[E\left(\frac{z}{x}\right)+1]f(z)dz, \qquad (1)$$

где $E(\alpha)$ – наибольшая целая часть числа α. Предположим, что найдена величина x_0, при которой $M(x_0) = \min M(x)$. Аналогичным образом можно найти и среднее квадратическое отклонение (ско), соответствующее $x_0 - \sigma_0$. Запишем выражение для нормальной базовой плотности вероятности с данными параметрами x_0, σ_0:

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}. \qquad (2)$$

В качестве базовой плотности можно выбрать любую плотность вероятности, но выбор нормальной плотности наиболее предпочтителен. Ею можно ограничиться для введения приближённой функции распределения оптимальной величины кванта. Однако в этом случае часть информации о случайной величине $\hat{Z}$ будет потеряна. Поэтому можно предложить другой способ построения плотности распределения величины оптимального кванта, основанный на методе, аналогичном методу максимального правдоподобия.

Изменим плотность вероятности (2) следующим образом. Сохраним в ней параметр x_0, а параметр σ_0 заменим параметром σ_i – параметром влияния (influence). В дальнейшем будем изменять величину этого параметра от середины σ_0 в выбранном подбором интервале изменения его значений в обе стороны с некоторым фиксированным шагом. Таким образом, вместо плотности вероятности (2) будем иметь плотность вероятности:

$$g(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_i^2}}, \qquad (3)$$

в которой C константа нормирования, зависящая от σ_i.

Далее, вводится гарантирующая вероятность q, величина которой определяет величину квантиля r, на которую слева и справа у хвостов плотности вероятности $g(x)$ отсекаются два отрезка. После этого обязательно вычисляется константа C и корректируется плотность (3). Последовательно вычисляются для каждого значения параметра σ_i значения величин r и вероятностей покрытия $P(r)$ квантованной области по следующим формулам:

$$\int_0^r g(z)dz - q = 0, \qquad (4)$$

$$P(r) = \int_0^{\infty}\left(\int_r^{2m_0-r} g(z)dz\right)^{E\left[\frac{u}{2(m_0-r)}\right]+1} f(u)du \qquad (5)$$

В результате получают для заданной величины q и множества значений σ_i множества значений величин r и $P(r)$. На основе их строятся аналитические или графи-

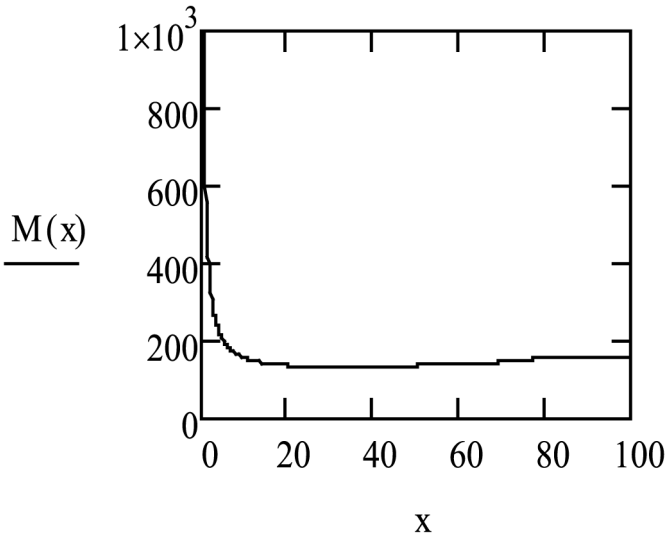

Рис. 1

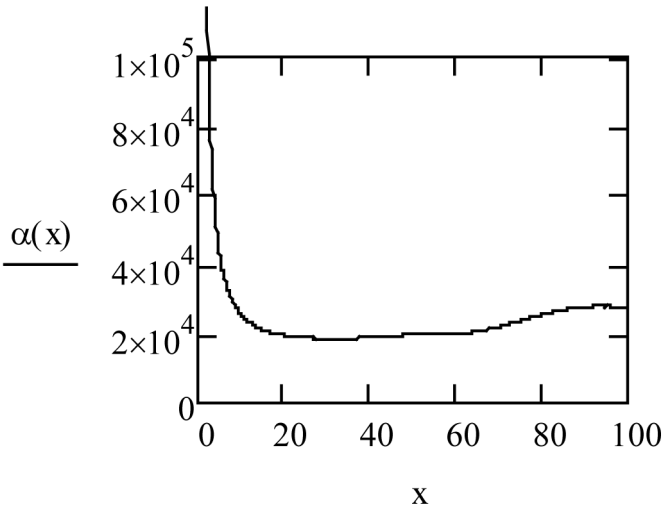

Рис. 2

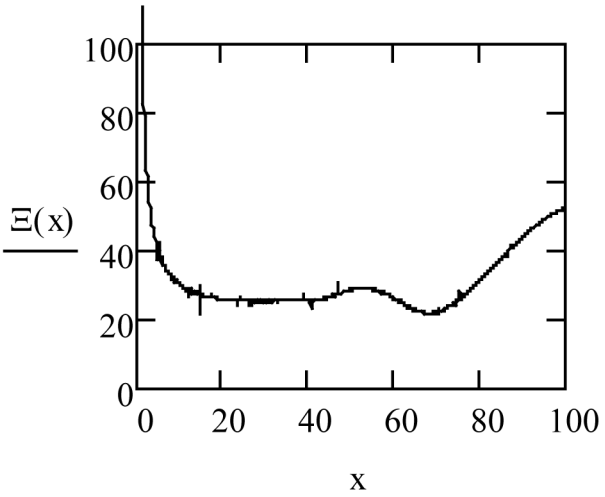

Рис. 3

ческие зависимости $r(\sigma_i)$, $P(\sigma_i)$. Далее, определяется максимальное значение $\max P(\sigma_i) = P(\sigma_0)$ и соответствующее ему оптимальное значение параметра влияния (ско) – σ_0. Используя значения m_0 и σ_0, получают по двум моментам аппроксимационную плотность вероятности случайной величины оптимального кванта, соответствующую заданной гарантированной вероятности q:

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}. \qquad (6)$$

Пример. Заданы следующие исходные данные об информации, которую нужно представить в виде последовательных квантов в памяти запоминающего устройства: $f(x) = dnorm(x, m, \sigma)$, $m = 100$ *ед.*, $\sigma = 20$ *ед.*, $c = 5$ *ед.*

Используя выражения

$$M(x) = (x+c)\int_0^\infty E[(\frac{z}{x})+1] f(z)dz,\ \alpha(x) =$$
$$= (x+c)^2 \int_0^\infty ([E(\frac{z}{x})+1])^2 f(z)dz,\ \Xi(x) =$$
$$= \sqrt{\alpha(x) - (E(x))^2} \qquad (7)$$

рассчитаем функции математического ожидания, второй начальный момент и среднее квадратическое отклонение случайной величины числа квантов. Графики функций представлены на рис. 1–3. Оси абсцисс ограничены областью, в пределах которой выделено самое минимальное значение математического ожидания. За оптимальное значение кванта принято $x_0 = 30$ *ед.*, при котором $M(30) = 134{,}147$ *ед.*, $\alpha(30) = 1{,}864 \cdot 10^4$ *ед.*^{2}, $\Xi(30) = 25{,}411$ *ед*.

Далее, для выполнения гарантированного квантования вводится базовая плотность вероятности:

$$gb(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_g^2}}, \qquad (8)$$

в которой $m_0 = 30$ *ед.*, а СКО – σ_g в дальнейшем будет изменяться относительно базового значения $\Xi(30)$ в обе стороны с некоторым выбранным произвольно шагом. По мере вычисления следует корректировать (8):

$$g(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_g^2}}.$$

Например, задаются значением гарантированной вероятности $q = 0{,}1$ и из уравнения (4) – последовательно определяют величины r. Одновременно рассчитывают величины вероятностей покрытия квантов по формуле:

$$P(r) = \int_0^\infty \Big(\int_r^{2m-r} g(z)dz \Big)^{E[\frac{x}{2(m_0-r)}]+1} f(x)dx. \qquad (9)$$

В результате расчетов получают систему из трёх транспонированных вектор-строк:

$$\sigma_g = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30)^T, \qquad (10)$$

$$r_1 = (29{,}36; 28{,}72; 27{,}44; 26{,}16; 24{,}88; 23{,}60; 17{,}25; 12{,}41; 10{,}12; 9{,}28; 9{,}08)^T, \qquad (11)$$

$$P_1 = (0{,}797; 0{,}798; 0{,}798; 0{,}799; 0{,}799; 0{,}799; 0{,}799; 0{,}777; 0{,}727; 0{,}670; 0{,}611)^T. \qquad (12)$$

Если принять, что гарантийная вероятность $q = 0{,}3$, то для тех же значений параметра влияния (10) можно получить:

$$r_2 = (29{,}74; 29{,}48; 28{,}95; 28{,}43; 27{,}90; 27{,}38; 24{,}78; 22{,}81; 22{,}12; 22{,}40; 23{,}26)^T, \qquad (13)$$

$$P_2 = (0{,}395; 0{,}395; 0{,}396; 0{,}396; 0{,}397; 0{,}397; 0{,}397; 0{,}376; 0{,}328; 0{,}269; 0{,}211)^T. \qquad (14)$$

На рис. 4 и 5 показаны зависимости 12, 11, а на рис. 6 и 7 – 14, 13.

Из них были выбраны следующие значения: для $q = 0{,}1$ $\sigma_1 = 6$, $m_1 = 30$, а для $q = 0{,}3$ – $q_2 = 7$, $m_2 = 30$. Для начальной плотности вероятности $q_0 = 25{,}411$, $m_0 = 30$.

Для всех трёх плотностей принята нормальная плотность вероятности. На рис. 8 представлены графики этих плотностей. Из рисунка следует, что самой «острой» является первая плотность, более «размытой» по срав-

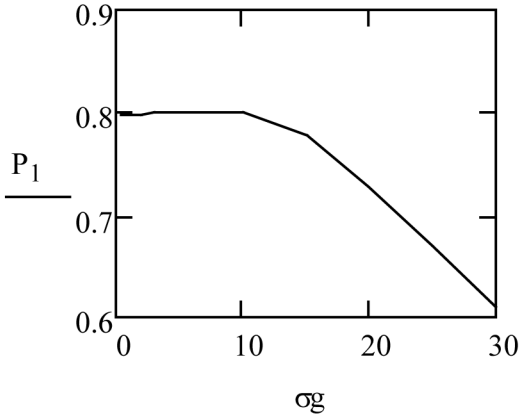

Рис. 4

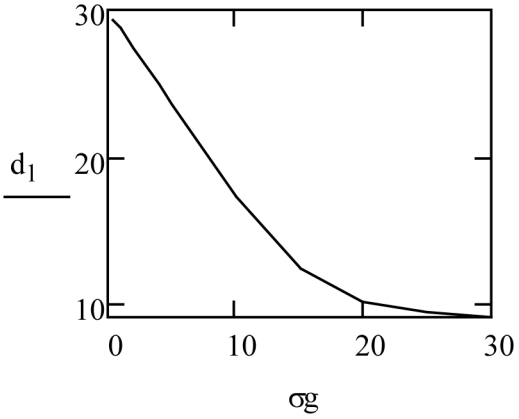

Рис. 5

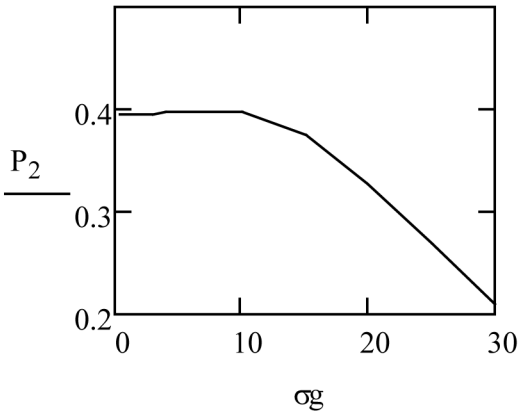

Рис. 6

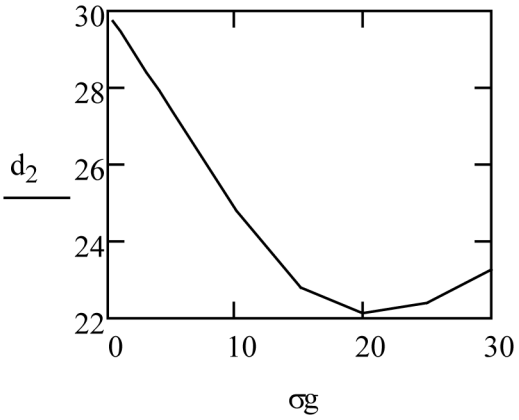

Рис. 7

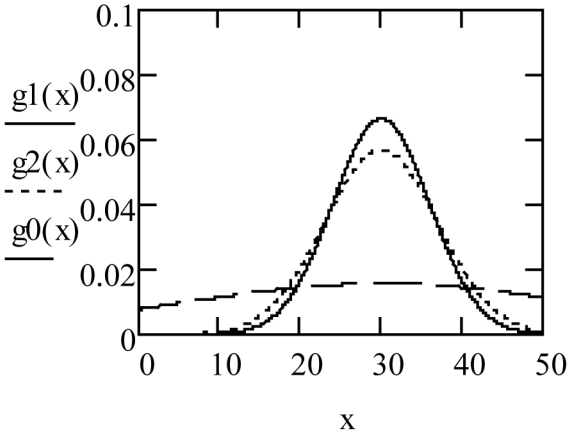

Рис. 8

нению с первой – вторая, а больше всех «размытой» – начальная плотность, плотность без гарантийной вероятности.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, сравнивая вероятности реализаций для случая с гарантированным квантованием для точек максимума, составляющих $\approx 0{,}8$ и $0{,}4$ и вероятности без гарантированного квантования. Последняя составляет всего 0,045 без учёта даже одного среднего квадратического отклонения от математического ожидания $M(30) = 134{,}147\,ед.$ С учётом его она становится ещё меньше. Вычисление было выполнено по формуле

$$P(x) = \int_{M(x)}^{\infty} f(x)dx\,.$$

Заключение

Предложенный подход к квантованию отличается введением функции распределения величины кванта, а не только его фиксированного значения.

Введение вероятностной гарантии подтверждает её целесообразность использования. Однако следует заметить, что чем меньше величина вероятности гарантии, тем выше вероятность достижения гарантированного результата. При отсутствии гарантированной вероятности результат квантования снижается. В дальнейшем изучении данного вопроса следует учитывать снижение ценности информации по мере удаления от центра её сбора и величину полезного вклада от охвата влиянием информации от центра сбора до гарантируемой границы.

Литература

1. Андронов, А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации / А.М. Андронов, Т.Н. Бокоев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.

2. Парамонов, И. Ю. Оптимальное вероятностное квантование информации с гарантированным ограничением зон влияния объёмных квантов / И.Ю. Парамонов, В.А. Смагин // Информация и Космос. – 2015. – № 1. – С. 48–51.