Оптимальное непрерывное управление взаимным маневром космических аппаратов без ограничений на вид траектории в орбитальной относительной системе координат

Optimal continuous control of mutual spacecraft maneuvering without restrictions on type of trajectory in orbital relative coordinate system

Гончаревский /Goncharevsky V.
Вилен Степанович
(vilenstepan@yandex.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: взаимный маневр – mutual maneuvering; энергетические затраты – power consumption; относительная система координат – relative coordinate system.

Высокая стоимость доставки каждого килограмма массы на начальную орбиту делает такой показатель качества управления, как энергетические затраты на выполнение взаимного маневра космических аппаратов, чрезвычайно важным и актуальным. В работе приводится содержание методики отыскания энергетически оптимального непрерывного управления взаимным маневром космических аппаратов при отсутствии ограничений на вид траектории в орбитальной относительной системе координат. В результате решения вариационных задач с фиксированными и подвижными концами найдены программы этого управления, а также определены оптимальные краевые условия выполнения различных разновидностей взаимного маневра при использовании таких программ.

High cost of each mass kilogram delivery to initial orbit makes such control quality factor as power consumption for mutual spacecraft maneuvering being overwhelmingly important and actual. The study gives method to determine energy-optimal continuous control for mutual spacecraft maneuvering without restrictions on type of trajectory in orbital relative coordinate system. As a result of solving variational problems with fixed and variable end points, programs for this control have been found, as well as optimal boundary conditions have been determined for performing different kinds of mutual maneuver when employing such programs.

Исследования показывают, что непрерывному управлению свойственны повышенные энергозатраты (ЭЗ) на выполнение взаимного маневра (ВМ) космических аппаратов (КА). Поэтому при разработке программ и алгоритмов данного управления первостепенное значение приобретает критерий минимума этих ЭЗ. В работе [1] получено решение задачи отыскания таких энергетически оптимальных программ и алгоритмов, когда для управления маневром на активном аппарате (АА) используются двигатели малой тяги с ограниченной мощностью, а следовательно, допустимые функции управляющего ускорения $\vec{u}$ принадлежат к классу непрерывных функций времени. Соотношения, определяющие эти программы и алгоритмы, даны в указанной работе в общем виде и справедливы при линейной динамической модели относительного движения (ОД) космических аппаратов для любой относительной системы координат (ОСК), в которой рассматривается это движение, для любой орбиты пассивного аппарата (ПА), с которым связано начало данной ОСК, и для различных видов ВМ.

Рассмотрим, какой вид будут иметь указанные программы и алгоритмы в задачах с фиксированными и подвижными концами при исследовании ВМ в наиболее широко используемой орбитальной ОСК.

Предположим, что ПА находится на близкой к круговой орбите, а орбиты ПА и АА компланарны. Тогда динамическая модель ОД согласно [2] будет описываться следующими линейными дифференциальными уравнениями (ЛДУ) с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = u_x,$$
$$\ddot{y} - 3y + 2\dot{x} = u_y, \qquad (1)$$

где $x, y, \dot{x}, \dot{y}, u_x, u_y$ – составляющие вектора относительного состояния центра масс активного аппарата $\vec{q}$ и непрерывного управления $\vec{u}$ в орбитальной ОСК xyz.

Минимизируемый функционал будет иметь вид

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_k} (u_x^2 + u_y^2) d\tau, \qquad (2)$$

а уравнение Эйлера-Пуассона будет представлять собой систему ЛДУ с постоянными коэффициентами

$$x^{IV} - 4\ddot{x} - 4y + 6\dot{y} = 0,$$
$$y^{IV} - 10\ddot{y} + 9y + 4x^{III} - 6\dot{x} = 0. \quad (3)$$

Общее решение этой системы, представляющее собой искомую экстремаль $\vec{R}_э$, имеет вид

$$x = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3 + (C_5 + C_6\tau)\sin\tau + (C_7 + C_8\tau)\cos\tau,$$
$$y = 2C_2/3 + C_4(2\tau^2 + 16/9) + 4C_3\tau/3 + (0{,}3C_6 - 0{,}5C_7 - 0{,}5C_8\tau)\sin\tau + (0{,}5C_5 + 0{,}3C_8 + 0{,}5C_6\tau)\cos\tau, \quad (4)$$

где $C_1 \ldots C_8$ – произвольные постоянные, значения которых определяются краевыми условиями $\vec{q}_0, \vec{q}_k$ и временем выполнения маневра $T = \tau_k - \tau_0$.

Подставив соотношения (4) и их производные в уравнения (1) и (2), получим экстремальный показатель энергозатрат $I_э$ и составляющие искомого оптимального управления $\vec{u}_э$

$$u_{xэ} = 0{,}4(C_6\cos\tau - C_8\sin\tau) - 2C_3/3 - 2C_4\tau,$$
$$u_{yэ} = -0{,}2(C_6\sin\tau + C_8\cos\tau) - 4C_4/3. \quad (5)$$

Из соотношений (5) можно получить, как частные случаи, оптимальные программы и алгоритмы непрерывного управления в задачах с фиксированными концами для ряда разновидностей ВМ (встреча с мягким и жестким контактом, пролет, удаление, обеспечение условий для последующего группового полета).

Определить энергетически оптимальные краевые условия взаимного маневра можно в результате решения соответствующих вариационных задач с подвижными концами. Для формулировки и постановки этих задач необходимо найти вариацию функционала (2). Она имеет вид

$$\delta I = 2\int_{\tau_0}^{\tau_k}(u_x\delta u_x + u_y\delta u_y)d\tau. \quad (6)$$

Проинтегрировав данное соотношение по частям, а затем приравняв его нулю, получим следующее краевое выражение

$$[u_x\delta\dot{x} - (4\ddot{x} + \dddot{y} - 7\dot{y})\delta y + (4\dddot{y} - \dddot{x} + 4\dot{x} - 6y)\delta x]\Big|_{\tau_0}^{\tau_k} = 0. \quad (7)$$

Соотношение (7) задает условия трансверсальности функционала (2) при фиксированном времени маневра $T = \tau_k - \tau_0$. Используя их, можно найти дополнительные граничные условия для различных вариантов задач с подвижными концами.

Для отыскания оптимального начального направления маневра $\beta_э$ необходимо решить вариационную задачу с подвижным правым концом. Левый конец экстремалей закреплен по координатам и скоростям, правый конец – по скоростям и координате y, а по координате x – свободен. Следовательно,

$$\delta\dot{x} = \delta\dot{y} = \delta x_k = \delta y_k = \delta y_0 = 0. \quad (8)$$

В силу произвольности величины δx_0 и учитывая соотношение (8), из условий трансверсальности (7) получаем дополнительно граничное условие, $4\dddot{y}_0 - \dddot{x}_0 + 4\dot{x}_0 - 6y_0 = 0$, которое вместе с условиями

$$y(0) = y_0, \quad x(T) = x_k, \quad y(T) = y_k,$$
$$\dot{x}(T) = \dot{x}_k, \quad \dot{y}(T) = \dot{y}_k, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

позволяет определить произвольные постоянные C_i в экстремалях (4). Подставив полученные значения C_i в соотношения (4, 5), найдем искомые экстремали и оптимальные управляющие функции. Оптимальное начальное направление манёвра определится соотношением

$$tg\beta_э = y_0 / x_{0э}, \quad (9)$$

где $x_{0э} = C_1 + C_7$.

Таким образом, направление $\beta_э$ является функцией времени маневра, конечных значений координат и скоростей, а также начальных скоростей и координаты y_0. При орбитах КА, близких к круговым, $\dot{x}_0 = 1{,}5y_0$, $\dot{y}_0 = 0$, и направление $\beta_э$ зависит только от конечных значений координат и скоростей, а также от T и начальной разности высот орбит y_0. Из соотношения (9) можно получить соответствующие формулы для различных разновидностей ВМ. Так, в случае сближения с мягким контактом $x_{0э} = -3Ty_0/4$ и $tg\beta_э = -4/3T$. Эти значения совпадают со значениями, характеризующими оптимальное начальное направление маневра сближения с мягким контактом при дискретном управлении.

Задача отыскания оптимальных начальных скоростей маневра $\dot{x}_{0э}$, $\dot{y}_{0э}$ является вариационной со свободным правым концом. Левый конец экстремалей закреплен по координатам и скоростям, правый конец – по координатам, а по скоростям свободен. Следовательно,

$$\delta x = \delta y = \delta\dot{x}_k = \delta\dot{y}_k = 0. \quad (10)$$

В силу произвольности $\delta\dot{x}_0$, $\delta\dot{y}_0$ и учитывая соотношения (10), из условий трансверсальности (7) получаем следующие дополнительные граничные условия $\ddot{x}_0 = 2\dot{y}_0$, $\ddot{y}_0 = 3y_0 - 2\dot{x}_0$. Их использование позволяет определить произвольные постоянные C_i в экстремалях (4). Подставив их значения в соотношения (2, 4, 5), получим экстремали, оптимальные управляющие функции, показатель ЭЗ, а также выражения для оптимальных начальных скоростей

$$\dot{x}_{0э} = 1{,}5y_0 + 0{,}25C_5 + 0{,}95C_8, \quad \dot{y}_{0э} = 1{,}6C_6 - 0{,}5C_7. \quad (11)$$

На рис. 1, 2 представлены графики $\dot{x}_{0э} = \dot{x}_{0э}(\beta)$ (сплошные линии), $\dot{y}_{0э} = \dot{y}_{0э}(\beta)$ (штриховые линии) и

$V_{0э} = \sqrt{\dot{x}_{0э}^2 + \dot{y}_{0э}^2} = V_{0э}(\beta)$ при различных T для маневра сближения с мягким контактом. Видно, что $V_{0э}$ уменьшается с увеличением T и имеет минимальные значения при β близких к 0° или 180°. На рис. 3 изображены зависимости энергозатрат $V_{p1} = V_{p1}(\beta)$, требуемых для мягкого сближения при оптимальных начальных скоростях. С ростом T затраты уменьшаются и усиливается их зависимость от β. При $T = \pi$ минимальные ЭЗ наблюдаются при β близком к β_{0x}, где β_{0x} – значение β_0 хомановского перехода при импульсном управлении.

Если требуется найти оптимальные конечные скорости маневра $\dot{x}_{kэ}$, $\dot{y}_{kэ}$, то для этого нужно решить вариационную задачу со свободным левым концом. Правый конец экстремалей закреплен по координатам и скоростям, левый конец – по координатам. Следовательно,

$$\delta x = \delta y = \delta\dot{x}_0 = \delta\dot{y}_0 = 0. \qquad (12)$$

В силу произвольности $\delta\dot{x}_k$, $\delta\dot{y}_k$ и учитывая соотношения (12), из условий трансверсальности (7) получаем дополнительные краевые условия $\ddot{x}_k = 2\dot{y}_k$, $\ddot{y}_k = 3y_k - 2\dot{x}_k$. Используя их, определяем произвольные постоянные C_i, подставив затем их значения в соотношения (2, 4, 5), получим искомые экстремали, оптимальные управляющие функции, показатель ЭЗ, а также выражения для оптимальных конечных скоростей.

На рис. 4, 5 представлены графики $\dot{x}_{kэ} = \dot{x}_{kэ}(\beta)$ (сплошные линии), $\dot{y}_{kэ} = \dot{y}_{kэ}(\beta)$ (штриховые линии) и $V_k = \sqrt{\dot{x}_{kэ}^2 + \dot{y}_{kэ}^2} = V_{kэ}(\beta)$ при различных T для маневра сближения с жестким контактом, если начальные орбиты КА близки к круговым. Видно, что $V_{kэ}$ уменьшается с ростом T и имеет максимальные значения при β близких к $60^\circ(240^\circ)$, а минимальные значения при β близких к $150^\circ(330^\circ)$. На рис. 6 изображены зависимости энергозатрат $V_{p1} = V_{p1}(\beta)$, требуемых для жесткого контакта с оптимальной конечной скоростью. С увеличением T энергозатраты уменьшаются, а характер их зависимости от β остается примерно одинаковым. Если $T = \pi$, то минимальные ЭЗ также наблюдаются при β близком к β_{0x}.

Задача отыскания одновременно оптимальных и начальных и конечных скоростей $\dot{x}_{0э}$, $\dot{y}_{0э}$, $\dot{x}_{kэ}$, $\dot{y}_{kэ}$ является вариационной со свободными концами по скорости и фиксированными концами – по координатам. Следовательно,

$$\delta x = \delta y = 0. \qquad (13)$$

В силу произвольности $\delta\dot{x}, \delta\dot{y}$ и учитывая соотношения (13), из условий трансверсальности (7) получаем $\ddot{x}_0 = 2\dot{y}_0$, $\ddot{y}_0 = 3y_0 - 2\dot{x}_0$, $\ddot{x}_k = 2\dot{y}_k$, $\ddot{y}_k = 3y_k - 2\dot{x}_k$. Еще четыре условия дают фиксированные концы по координатам $\vec{R} = \vec{R}_0$, $\vec{R}(T) = \vec{R}_k$. Используя эти условия для определения произвольных постоянных C_i и подставляя затем полученные значения C_i в выражения для первых производных экстремалей (4) при $\tau = 0$ и $\tau = T$, находим искомые оптимальные скорости, которые полностью совпадают с требуемыми начальными и конечными скоростями, имеющими место при одноимпульсном методе свободных траекторий (МСТ).

Интересно отметить, что подстановка значений найденных скоростей в соотношения (5) дает $u_{xэ} = u_{yэ} = 0$. Следовательно, при $\dot{x}_0 = \dot{x}_{0э}$, $\dot{y}_0 = \dot{y}_{0э}$ оптимальным движением будет свободное движение. Таким образом, одноимпульсный МСТ является предельным случаем оптимального непрерывного управления, если оптимальные начальные скорости сообщаются в начале маневра мгновенно одним импульсом. Отсюда можно сделать вывод о том, что при любых краевых условиях по скорости, отличающихся от оптимальных значений, оптимальное непрерывное управление будет требовать больше энергозатрат, чем одноимпульсный МСТ. Аналогичный вывод может быть сделан и в случае выполнения маневра зависания относительно заданной точки.

Определить оптимальное время выполнения маневра $T_э$ можно в результате решения вариационной задачи со свободным левым концом по времени. Следовательно,

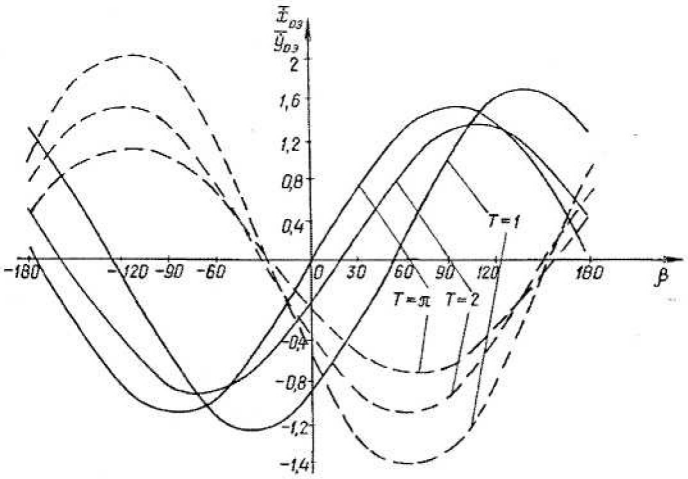

Рис. 1

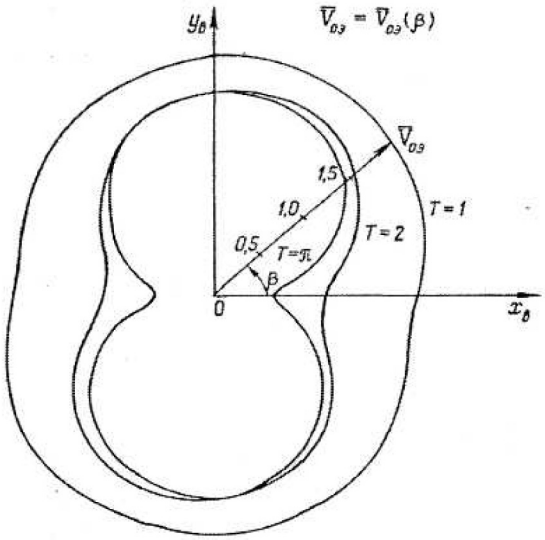

Рис. 2

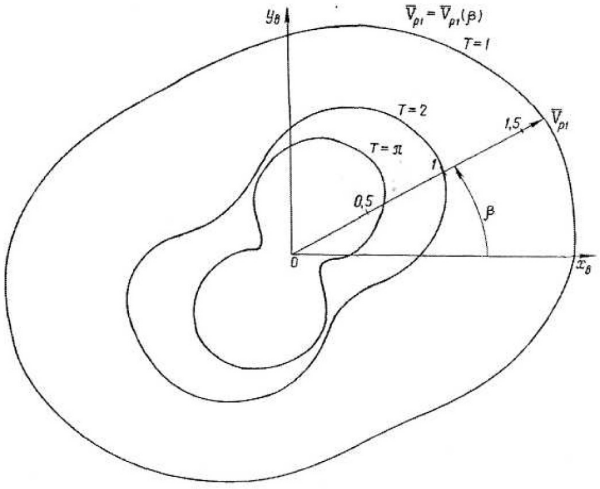

Рис. 3

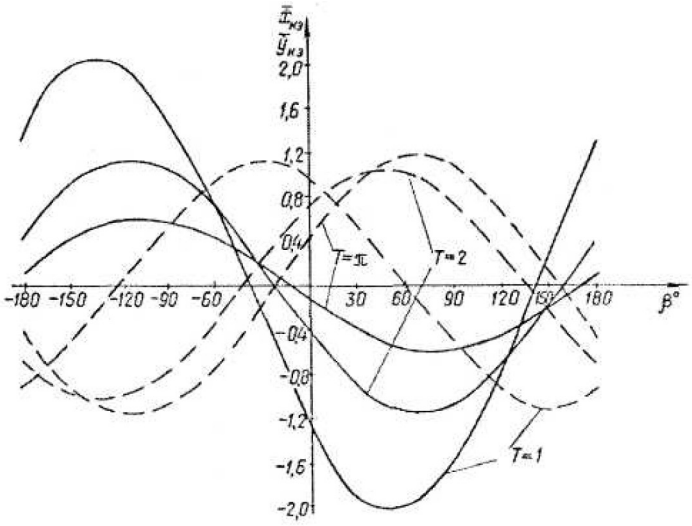

Рис. 4

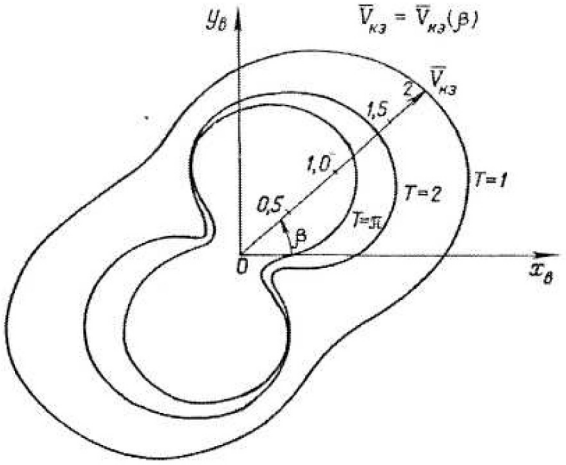

Рис. 5

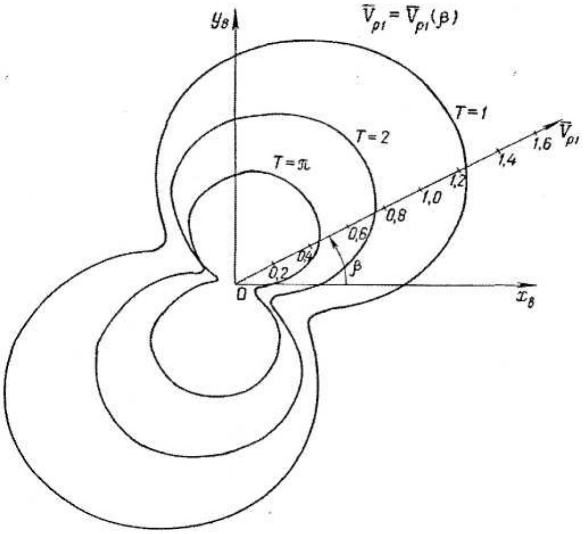

Рис. 6

$\delta x = \delta y = \delta \dot{x} = \delta \dot{y} = \delta \tau_0 = 0$. Условия трансверсальности функционала (2) при подвижном левом конце по времени ($\delta \tau_k = \delta T = 0$) и фиксированных концах по координатам и скоростям имеют вид

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}} - \ddot{x}F_{\ddot{x}} - \ddot{y}F_{\ddot{y}}\Big|_{\tau=T_э} = 0. \qquad (14)$$

Из этого соотношения получаем дополнительное краевое условие

$$9y_k^2 - 3y_k\ddot{y}_k - 6\dot{x}_k y_k = 0. \qquad (15)$$

Его можно использовать для отыскания оптимального времени $T_э$. Для этого необходимо сначала найти постоянные C_i из краевых условий $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$, $\vec{q}(T_э) = \vec{q}_k$. Затем, используя соотношения (4) и его производные, можно получить значения $y_k, \dot{x}_k, \ddot{y}_k$, подставив их в уравнение (15) и решая его относительно $T_э$, находим искомое значение оптимального времени маневра. Аналогичным образом может быть найдено оптимальное время и в задачах с подвижными концами по координатам и скоростям.

Литература

1. Гончаревский, В. С. Энергетически оптимальное управление взаимным маневром космических аппаратов при отсутствии ограничений на вид программной траектории / В.С. Гончаревский // Информация и Космос. – 2004. – № 4. – С. 57–58.

2. Гончаревский, В. С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов / В.С. Гончаревский. – МО РФ, 1998. – 87с.

3. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.