Оценивание длительности и количества информационной работы в цикле управляющей сети

Evaluation of duration and quantity of informational work in control network cycle

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
действительный член МАИ.
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского»
(ВКА им. А. Ф. Можайского) МО РФ,
почетный профессор.
г. Санкт-Петербург

Шерстобитов / Sherstobitov S.
Сергей Александрович
(radosti_yad@mail.ru)
ВКА им. А. Ф. Можайского,
адъюнкт кафедры метрологического обеспечения.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: информационная управляющая система – information management system; информационный процесс принятия решения – informational decision system; произвольные распределения – arbitrary distribution; вероятность состояния – state probability; граф состояний – state graph; матричный метод – matrix method.

Предложены модели для вероятностного оценивания длительности и эффективной информационной работы процесса принятия решения в информационной управляющей системе. В основе моделей лежит понятие случайных величин длительности и работы, их вероятностных характеристик. Для получения интегральных характеристик сети использован стохастический граф сети и его матричное представление.

Proposed models for probabilistic evaluation of effective informational work duration for decision-making process in information management system. The basis for the models is formed by concept of random values of duration and work, their probabilistic characteristics. To derive network integral characteristics the network stochastic graph and its matrix representation is used.

Введение

Цикл управления сложной системы условно можно подразделить на элементарные временные этапы, следующие друг за другом до конечного этапа, формирующего результат управления. На каждом элементарном этапе выполняется определённая функциональная зависимость выхода от входа. Эта функциональная зависимость может быть представлена различными физическими сигналами, механическими, электрическими, символьными и другими.

В современных информационных системах в этапах выполняются преобразования информации. Информация – «это не энергия и не материя» [1]. Современные информационные системы весьма разнообразны. Это системы управления объектами, социальные системы, системы поиска, системы сбора, накопления и хранения информации, банковские системы, системы управления бизнесом, системы обучения, системы управления военного назначения и другие.

Целью настоящей статьи является рассмотрение информационной управляющей системы (сети) и построение на ее основе математической формализации информационного процесса принятия решения в количественном виде.

Перебирая множество различных технических источников, посвящённых рассмотрению данного вопроса, мы воспользуемся монографией [2], в которой излагается вопрос противостояния двух конфликтующих сторон и поэтапно описывается процесс принятия решения в конфликте – цикле J. R. Boyd. В этой статье нами будут предложены две математических модели: вероятностная матричная модель для определения вероятности получения конечного результата и вероятностная модель для определения количества информационной работы, производимой вычислительной сетью в цикле.

Сущность цикла и его формальная модель. В соответствии с идеей J. R. Boyd [2] любая деятельность в сфере управления с целью достижения результата может быть представлена в виде кибернетической модели. Указанная модель предполагает многократное повторение петли (цикла) действий, составленного из четырех последовательных взаимодействующих этапов: наблюдение (observation), ориентация (orientation), решение (decision), действие (action). Фактически имеет место развитие ситуации по спирали и на каждом этапе этой спирали осуществляется взаимодействие с внешней

средой. В модели может быть неоднократно реализован принцип обратной связи, в соответствии с которым информация с выходов этапов подается на входы предшествующих этапов, чтобы уточнить и скорректировать поведение системы на последующих этапах.

Созданная для противостояния двух конфликтующих сторон, модель Бойда с успехом может находить применение для моделирования различных видов деятельности с целью достижения конечного результата, например в бизнесе, политике и социологии и других. Иначе говоря, в тех областях, где предполагается наличие сторон с противоположными интересами, соперничество или конкуренция. Каждая противоборствующая сторона действует и принимает решения в рамках собственного цикла управления принятия решений и деятельности. Успехом в противоборстве, как правило, пользуется та сторона, которая раньше завершит свой цикл из четырёх указанных этапов.

В ряде случаев, когда противостоящей стороны нет, ее роль может выполнять динамически изменяющаяся внешняя среда. Примером такой ситуации являются действия и принятие решений в условиях катастроф и стихийных бедствий. С целью предсказания будущего успеха в противоборстве в условиях неопределённости качественное оценивание часто может оказаться недостаточным. Поэтому необходимо предусмотреть количественные оценивания времени выполнения циклов обеими сторонами, чтобы иметь возможность сравнить получаемые оценки друг с другом с целью предсказания ожидаемого результата.

Оценивание длительности выполнения цикла управления. Построим сетевую математическую модель для вероятностного оценивания длительности цикла. Четыре этапа цикла во времени выполняются последовательно друг за другом. Кроме этого, мы предполагаем для примера, что второй и третий элементы цикла могут обращаться к предшествующим элементам неоднократно с целью корректировки недостающей информации. В принципе, могут предполагаться и любые другие обратные связи в цикле, с охватом и большего количества элементов. Пример графа организации цикла показан на рисунке 1.

Граф содержит 5 пять узлов: 0 узел является истоком графа, узлы 1 и 4 соответствуют четырём этапам цикла, а узел 5 служит стоком графа. Обозначим вероятности успешных завершений временных процессов в этапах i в течение времён t_i через $P_i(t_i)$, $i = 1,2,3,4$, а вероятности переходов между этапами цикла соответственно – через $r_{01}, r_{12}, r_{21}, r_{23}, r_{32}, r_{34}$. При этом должны выполняться условия $r_{01} = 1; r_{21} + r_{23} = 1; r_{32} + r_{34} = 1, r_{45} = 1$.

В соответствии с источником [3] можно составить матрицу переходов между узлами графа $G = G(t), t = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & r_{01}P_0(t_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{12}P_1(t_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{21}P_2(t_2) & 0 & r_{23}P_2(t_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{32}P_3(t_3) & 0 & r_{34}P_3(t_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{45}P_4(t_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Введем понятие шага как единичного перехода между этапами цикла. Для того чтобы найти вероятности безошибочной работы за два шага, нужно просуммировать с соответствующими вероятностями произведения вероятностей по всем путям, содержащим две вершины, это достигается возведением матрицы G в квадрат. Возводя матрицу G в куб, получаем вероятности безошибочной работы за три шага и т.д.

Построим матрицу

$$T = I + G(t) + G^2(t) + \cdots = I(I - G(t))^{-1} \quad (2)$$

где I – единичная матрица.

Элемент матрицы T с номером (0,5) представляет собой выражение для вероятности безошибочной работы всего цикла с учетом всех возможных последовательностей выполнения его отдельных этапов.

Таким образом, вероятность безошибочной работы цикла будет равна:

$$P(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{Q(t)}{R(t)} \quad (3)$$

где $Q(t)$ алгебраическое дополнение элемента с номером (5, 0) матрицы $(I - G(t))$, $R(t)$ главный определитель этой матрицы.

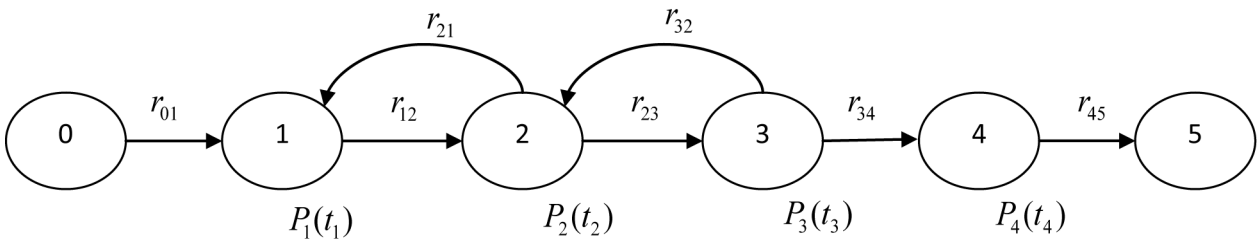

Рис. 1. Граф организации цикла

Пример. Необходимо найти значение вероятности безошибочной работы цикла, стохастический граф которого представлен на рисунке 1.

Заданы следующие значения параметров цикла:

$$r_{01}=1;\ r_{12}=1;\ r_{21}=0.1;\ r_{23}=0.9;\ r_{32}=0.05;\ r_{34}=0.95;\ r_{45}=1.$$
$$P_0(t_0)=1;\ P_1(t_1)=0.93;\ P_2(t_2)=0.84;\ P_3(t_3)=0.97;\ P_4(t_4)=0.95. \quad (4)$$

Построим матрицу $(I-G)$:

$$(I-G)=\begin{pmatrix} 1 & -r_{01}P_0(t_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_{12}P_1(t_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{21}P_2(t_2) & 1 & -r_{23}P_2(t_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{32}P_3(t_3) & 1 & -r_{34}P_3(t_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -r_{45}P_4(t_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Найдем алгебраическое дополнение Q элемента (5, 0) матрицы (5):

$$Q=-\begin{pmatrix} -r_{01}P_0(t_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -r_{12}P(t_1) & 0 & 0 & 0 \\ -r_{21}P_2(t_2) & 1 & -r_{23}P(t_2) & 0 & 0 \\ 0 & -r_{32}P_3(t_3) & 1 & -r_{34}P_3(t_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -r_{45}P_4(t_4) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Производя вычисления по приведённым формулам (2 6), получим:

$$R=0.885;\ Q=0.615;\ P(t_0,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=0.695 \quad (7)$$

В общем случае величины вероятностей P_i для всех i могут находиться по известным распределениям времени выполнения этапов цикла при заданных значениях t_i.

О модификации модели.1. Если вместо вероятностей $P_i(t_i)$ полагать изображения Лапласа плотностей вероятностей пребывания в этапах цикла $\overset{\circ}{g}_i(s)$, то можно по приведённым формулам вычислять значения начальных моментов времени пребывания процесса в цикле. 2. Можно снять условие статистической независимости этапов цикла. Однако в этом случае математические выражения и возможность быстрого с помощью их вычисления конечного результата существенно усложнятся.

О дальнейшем развитии модели.

1. При участии в противоборстве двух сторон, каждая из которых может оцениваться вероятностью окончания цикла за определённое время, можно судить о превосходстве или непревосходстве одной стороны по сравнению с другой.

2. При отсутствии необходимых значений исходных вероятностных параметров для модели можно построить модель на основе теории нечётких множеств с привлечением экспертного материала.

3. При наложении определённых ограничений на циклы могут быть поставлены и решены оптимизационные задачи противоборства сторон.

Возрастание сложности сетевого управления и информационных сетей связано с применением так называемого сетецентрического управления сложными объектами. Это неизбежно приводит к увеличению стоимости создания и применения таких систем [3]. Для сравнения их друг с другом, выбора наилучших, наиболее экономных в эксплуатации, более быстродействующих и т. д., помимо вероятностного оценивания длительности цикла управляющей сети необходимо оценивать величину ее эффективной информационной работы. Она должна определяться на основе информационных работ этапов цикла, связанных воедино для достижения поставленной цели.

Положим, что для цикла управления, граф организации которого изображен на рисунке 1, известны пропускные способности (производительности) I_i (число операций в единицу времени) всех этапов. Положим также, что известны плотности распределений длительностей пребывания в этапах цикла $f_i(t)$ [4]. Задача состоит в том, чтобы определить плотность вероятности величины работы, выполняемой сетью при переходе информации от её истока к стоку. По этой плотности можно будет определить начальные моменты и функцию распределения величины работы сети. Решение этой задачи позволяет также определять величину работы, выполняемой на произвольной траектории между i-ым и j-ым узлами сети. Метод решения задачи основывается на предположении о вероятностной независимости длительностей работ узлов. Однако следует заметить, что это ограничение при необходимости может быть снято. Снятие его приведёт только к усложнению математического алгоритма решения задачи и длительности получения численных расчётов.

Чтобы перейти от длительностей пребывания узлов в работоспособных состояниях к величинам работ, выполняемых узлами, выполним простое преобразование случайных величин $\overline{W}_i = I_i\,\overline{t}_i$, в котором $\overline{W}_i$ – случайная величина работы в i-ом узле сети за случайное время $\overline{t}_i$. Плотность вероятности величины работы будет равна:

$$\varphi_i(w)=\frac{1}{I_i}f_i\left(\frac{w}{I_i}\right). \quad (8)$$

Размерность данной плотности – 1/операция, функция распределения – как обычно, величина безразмерная. В отдельных технологических приложениях плотность может измеряться как стоимость/единица времени.

В дальнейшем нам потребуется на любой траектории случайного процесса суммировать величины работ, поэтому представим (8) в преобразовании Лапласа [4]:

$$g_i(s)=\overset{\circ}{f}_i(I_i s), \quad (9)$$

где $\circ$, s – символ преобразования и переменная Лапласа.

Построим матрицу:

$$G(s)=\begin{pmatrix} 0 & r_{01}g_0(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{12}g_1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{21}g_2(s) & 0 & r_{23}g_2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{32}g_3(s) & 0 & r_{34}g_3(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{45}g_4(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Каждый элемент матрицы $r_{i,j}g_i(s)$ есть произведение преобразования Лапласа плотности величины выполненной работы в i-ом узле сети на вероятность перехода после завершения работы в i-ом узле в узел j. Величины работ в 0 и 5 узлах полагаются равными нулю, а $g_0(s)=g_5(s)=1$.

Преобразование Лапласа плотности распределения величины работы между узлами i и j сети будет равно элементу (i, j) матрицы $T(s)$ вида:

$$T(s)=I+G(s)+G^2(s)+\cdots=I(I-G(s))^{-1} \quad (11)$$

где I – единичная матрица.

В соответствии с правилом вычисления обратной матрицы элемент (i, j) равен [3]:

$$Y_{i,j}(s)=A_{j,i}(s)/R(s) \quad (12)$$

где $A_{j,i}(s)$ – алгебраическое дополнение элемента (i, j) матрицы $T(s)$; $R(s)$ – определитель матрицы $T(s)$. Из (12) следует, что преобразование Лапласа плотности величины работы в сети будет соответственно равно:

$$Y_{0,5}(s)=A_{5,0}(s)/R(s) \quad (13)$$

Если величину работы в каждом узле сети задать начальными моментами, то можно предложить алгоритм определения начальных моментов величины работы между i-ым и j-ым узлами сети. Алгоритм основан на связи между k-ым начальным моментом и k-ой производной преобразования Лапласа в точке $s = 0$. Подставляя $(-1)^k \left.\frac{d^k g_l(s)}{ds^k}\right|_{s=0}, l=\overline{0,M+1}$ вместо значение k-го момента распределения величины работы в l-ом узле сети, а вместо $g_l(s)\big|_{s=0}$ – единицу, получим k-ый начальный момент распределения величины работы между i-ым и j-ым узлами сети.

По вычисленным начальным моментам одним из методов, указанных в [4], можно получить аппроксимирующую плотность распределения величины работы, выполненной между узлами i и j сети.

Пример. Требуется выполнить оценивание информационной работы для стохастического графа сети, показанного на рисунке 1.

Заданы производительности узлов сети $I_1 = 10$ оп/час, $I_2 = 7$ оп/час, $I_3 = 4$ оп/час, $I_4 = 4$ оп/час, и плотности распределений времени работы узлов $f_1(t)=\delta(t-T_1)$, $f_2(t)=\delta(t-T_2)$, $f_3(t)=\delta(t-T_3)$, $f_4(t)=\delta(t-T_4)$, $T_1=12$ час., $T_2 = 15$ час., $T_3 = 9$ час., $T_4 = 6$ час. Распределения времени работ в примере взяты вырожденными для сокращения времени решения задачи на компьютере. Вместо вырожденных распределений времени пребывания в узлах сети можно использовать непосредственно любые распределения вероятностей или их представления в аппроксимированном виде [3]. В данном случае изображения плотностей вероятностей величин работ узлов

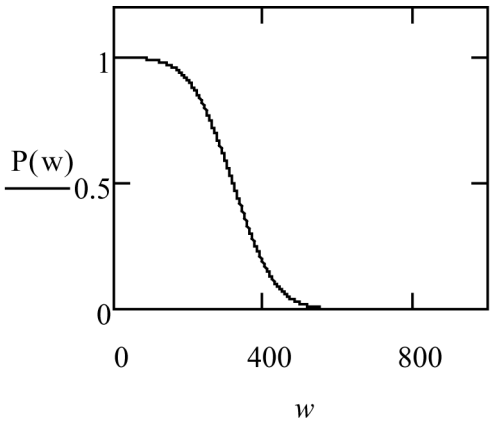

Рис. 2. Зависимость вероятности выполнения работы в сети от её значения

в преобразовании Лапласа принимают вид: $g_1(s) = e^{-I_1T_1s}$, $g_2(s) = e^{-I_2T_2s}$, $g_3(s) = e^{-I_3T_3s}$, $g_4(s) = e^{-I_4T_4s}$. Значение $M = 4$. Матрица представляется в виде $(I - G(s))$:

$$(I - G(s)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_{12}g_1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{21}g_2(s) & 1 & -r_{23}g_2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{32}g_3(s) & 1 & -r_{34}g_3(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -r_{45}g_4(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Элемент матрицы $(I - G(s))^{-1}$ с номером (5,0) будет равен:

$$Y_{0,5}(s) = \frac{r_{12}g_1(s)r_{23}g_2(s)g_3(s)r_{34}g_4(s)}{1 - r_{23}g_2(s)r_{32}g_3(s) - r_{12}g_1(s)r_{21}g_2(s)} \quad (15)$$

Подставляя исходные данные в (15), и полагая $s = 0$, получаем $Y_{0,5}(0) = 1$, что подтверждает выполнимость условия нормирования плотности. Значения трёх начальных моментов, найденные с помощью дифференцирования (16) и взятия пределов при $s = 0$, равны: $\nu_1 = 318,7$ оп., $\nu_2 = 109698,6$ оп^2, $\nu_3 = 4,24 \cdot 10^7$ оп^3.

Среднеквадратическое значение и коэффициент вариации $\sigma = 90,03$ оп., $\eta = 0,282$.

Нормируя плотность вероятности с коэффициентом $\tilde{N} = 1.0002$, вычисляем новые значения моментов $\overline{\nu}_1 = 318,8$ оп., $\overline{\nu}_2 = 109700,0$ оп^2, $\overline{\nu}_3 = 4,014 \cdot 10^7$ оп^3, для которых подберём нормальную плотность вероятности. Найдём по ней третий начальный момент и сравним его с вычисленным по формуле (15) третьим моментом.

Погрешность этого сравнения не превышает $\Delta = 10.5$ %, что является вполне удовлетворительным для аппроксимации нормальным распределением. График вероятности $P(w)$ того, что величина эффективной информационной работы, выполненной в сети, будет не менее w, показан на рисунке 2.

Заключение

Предложены модели для вероятностного оценивания длительности и эффективной информационной работы процесса принятия решения в информационной управляющей системе (сети). В основе моделей лежит понятие случайных величин длительности и работы, их вероятностных характеристик. Для получения интегральных характеристик сети использован стохастический граф сети и его матричное представление.

Предложенные математические модели могут быть применимы также для сетей самого различного назначения. Вместо показателя эффективной работы в них могут использоваться и другие показатели, например стоимость, количество продукта и т.д. Ограничительные допущения моделей (независимость работы узлов, детерминированность их производительности, фиксированность вероятностей переходов) могут быть сняты. Однако это приведёт к усложнению моделей и увеличению времени реализации их на компьютере.

Литература

1. Винер, Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине / Н. Винер ; пер. с англ. И.В. Соловьева и Г.Н. Поварова ; под ред. Г.Н. Поварова. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 344 с.

2. Ивлев, А. А. Основы теории Бойда. Направления развития, применения и реализации: монография / А.А. Ивлев. – М.: Знание, 2008. – 64 с.

3. Смагин, В. А. Техническая синергетика. Вероятностные модели сложных систем / В.А. Смагин. – СПб: ВКА им. Можайского, 2004. – 172 с.

4. Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: ГРФМЛ, 1961. – 524 с.