

Апостериорная оценка состояний многосвязной цепи Маркова

Posteriori evaluation of high order Markov chain

Прозоров / Prozorov D.

Дмитрий Евгеньевич

(prozorov.de@gmail.com)

доктор технических наук, доцент.

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет» (ВятГУ), профессор кафедры радиоэлектронных средств.

г. Киров

Яшина / Yashina A.

Александра Геннадьевна

(ayashina.pmi@gmail.com)

ВятГУ,

ассистент кафедры прикладной математики и информатики.

г. Киров

Плетнёв / Pletnev K.

Константин Владимирович

(pletnev.kirov@gmail.com)

ВятГУ,

ассистент кафедры прикладной математики и информатики.

г. Киров

Ключевые слова: многосвязная цепь Маркова – high order Markov chain; марковская теория оптимального нелинейного оценивания – Markov theory of optimal nonlinear estimation.

Математический аппарат непрерывных и дискретных процессов Маркова нашел широкое применение при оценке параметров процессов в инфокоммуникационных и радиотехнических системах. В статье рассмотрена задача оценки состояний дискретного параметра (ДП) наблюдаемой системы, последовательность которых может быть представлена моделью многосвязной цепи Маркова. Разработан алгоритм оценки состояний ДП системы и исследована его эффективность при изменении статистических характеристик наблюдаемого сигнала.

Mathematical apparatus of continuous and discrete Markov processes has found extensive application in evaluation of process parameters in infocommunications and radio systems. The article considers problem of observed system discrete parameter (DP) states assessment the sequence of which states can be represented by high order Markov chain model. System DP states assessment algorithm has been developed, and this algorithm effectiveness has been investigated in the process of observed signal statistical characteristics variation.

Введение

Математический аппарат непрерывных и дискретных процессов Маркова нашел широкое применение при оценке параметров процессов в инфокоммуникационных и радиотехнических системах. Основы марковской теории оптимального нелинейного оценивания (МТО) были заложены Р. Л. Стратоновичем и независимо от него с середины 60-х гг. разрабатывалась Г. Дж. Кушнером и А. Б. Баггероэром. МТО нашла применение при решении разнообразных радиотехнических задач в исследованиях Н. К. Кульмана, В. И. Тихонова, В. Н. Харисова, М. С. Ярлыкова, М. А. Миронова, А. Н. Ширяева, А. Н. Детинова, В. П. Дмитриева, Д. Снайдера, И. Н. Амиантова и других авторов.

Исследования, представленные в монографии И. Н. Амиантова [1], были в дальнейшем продолжены коллективом авторов: Е. П. Петров, А. В. Частиков, Д. Е. Прозоров, Е. В. Медведева, И. С. Трубин и др. при решении задач: нелинейной фильтрации импульсных сигналов, фильтрации и сегментации изображений и видеопоследовательностей, поиска и кодовой синхронизации сигналов цифровых систем связи и других областях [2–6].

В данной работе результаты исследований, полученные в монографии [6], обобщаются на оценку дискретного параметра системы, описываемого моделью многосвязной цепи Маркова произвольного порядка.

Постановка задачи

Пусть наблюдаемая система описывается несколькими параметрами, один из которых μ_k подлежит определению, а остальные несущественны. Будем также полагать, что параметр μ_k изменяется в дискретные моменты времени $t_k \in \mathbb{Z}_+$, может принимать конечное количество состояний $K \in \mathbb{N}$ и подвергается воздействию аддитивной помехи n_k :

$$\langle n(t_k) \rangle = 0, \langle n(t_l)n(t_m) \rangle = \frac{N_0 \delta(t_m - t_l)}{2} \quad (1)$$

с заданной плотностью вероятности $p(n_k)$.

Требуется разработать алгоритм оценки дискретного состояния параметра μ_k наблюдаемой системы в момент времени t_k .

Модель многосвязной конечной цепи Маркова

Если корреляционная зависимость между состояниями μ_k и μ_{k+m} убывает по экспоненциальному или близкому к нему закону и ограничена интервалом $T = t_{k+m} - t_k$, то, в соответствии с теоремой Дуба [7], для оценки состояний μ_k можно использовать хорошо разработанную теорию процессов Маркова.

Многосвязная (связности m) однородная цепь Маркова с K состояниями описывается вероятностями переходов вида [7,8]

$$P(\mu_n^{(k)} | \mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)} \dots \mu_r^{(k-m)} \mu_q^{(k-m-1)}, \dots) = P(\mu_n^{(k)} | \mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)} \dots \mu_r^{(k-m)}), \quad (2)$$

($i, j, \dots, r, q, n = \overline{1, K}$) и вектором вероятностей начальных состояний

$$[P(\mu_1), \dots, P(\mu_K)]^T. \quad (3)$$

Условные вероятности переходов (2) могут быть представлены в виде матрицы вероятностей переходов размера $K^m \times K$

$$\Pi^* = \begin{bmatrix} \pi_{1\dots 1,1} & \dots & \pi_{1\dots 1,K} \\ \pi_{1\dots 2,1} & \dots & \pi_{1\dots 2,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{2\dots 1,1} & \dots & \pi_{2\dots 1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{K\dots K,1} & \dots & \pi_{K\dots K,K} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\pi_{i\dots r,n} = P(\mu_n^{(k)} | \mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)} \dots \mu_r^{(k-m)})$.

Матрицы вида (4) неудобны для формирования уравнений оценки апостериорной вероятности цепи Маркова. В работе [9] представлен метод преобразования таких матриц к «квадратному» виду.

Сформируем векторы

$$\bar{\mu}^{(k-1)} = (\mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)} \dots \mu_r^{(k-m)}) \quad (5)$$

длины m . Количество различающихся векторов $\bar{\mu}^{(k)}$ равно K^m . Преобразование (5) порождает простую цепь Маркова – векторную последовательность $\{\bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \dots\}$ с матрицей вероятностей переходов размера $K^m \times K^m$.

При известных условных вероятностях (4) можно определить вероятности перехода этой простой цепи Маркова [9, 10]:

$$P(\bar{\mu}^{(k)} | \bar{\mu}^{(k-1)}) = \frac{P(\{\mu_n^{(k)} \dots \mu_v^{(k-m+1)}\}, \{\mu_i^{(k-1)} \dots \mu_r^{(k-m)}\})}{P(\mu_i^{(k-1)} \dots \mu_r^{(k-m)})} = \frac{P(\mu_n^{(k)} \mu_i^{(k-1)} \dots \mu_r^{(k-m)})}{P(\mu_i^{(k-1)} \dots \mu_r^{(k-m)})} = P(\mu_n^{(k)} | \mu_i^{(k-1)} \dots \mu_r^{(k-m)}), \quad (6)$$

где $n, i, \dots, r, v = \overline{1, K}$.

Пример 1.

Пусть $m = 2$ и $K = 2$. Тогда переходные вероятности (6) принимают вид

$$P(\bar{\mu}^{(k)} | \bar{\mu}^{(k-1)}) = \frac{P(\{\mu_n^{(k)} \mu_i^{(k-1)}\}, \{\mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)}\})}{P(\mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)})} = \frac{P(\mu_n^{(k)} \mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)})}{P(\mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)})} = P(\mu_n^{(k)} | \mu_i^{(k-1)} \mu_j^{(k-2)}), \quad (7)$$

где $i, j, n = \overline{1, 2}$.

Обозначим $\bar{\mu}_1^{(k)} = (\mu_1^{(k)} \mu_1^{(k-1)})$, $\bar{\mu}_2^{(k)} = (\mu_2^{(k)} \mu_1^{(k-1)})$, $\bar{\mu}_3^{(k)} = (\mu_1^{(k)} \mu_2^{(k-1)})$, $\bar{\mu}_4^{(k)} = (\mu_2^{(k)} \mu_2^{(k-1)})$. Переходные вероятности (7) образуют матрицу размера $K^m \times K^m = 4 \times 4$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\pi_{ij} = P(\bar{\mu}_i^{(k)} | \bar{\mu}_j^{(k-1)})$.

Нулевые элементы матрицы (8) соответствуют вероятностям невозможным событиям.

На рис. 1 представлена диаграмма переходов для цепи Маркова с матрицей вероятностей переходов (8).

Подобным образом можно получить матрицы переходных вероятностей для общего случая ($m \geq 2, K \geq 2$). Для элементов «квадратных» матриц вида (8) должны соблюдаться условия нормировки

$$\sum_{j=1}^{K^m} \pi_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1, K^m} \quad (9)$$

и согласованности

$$p_i = \sum_{j=1}^{K^m} p_j \pi_{ji}, \quad i, j = \overline{1, K^m}, \quad (10)$$

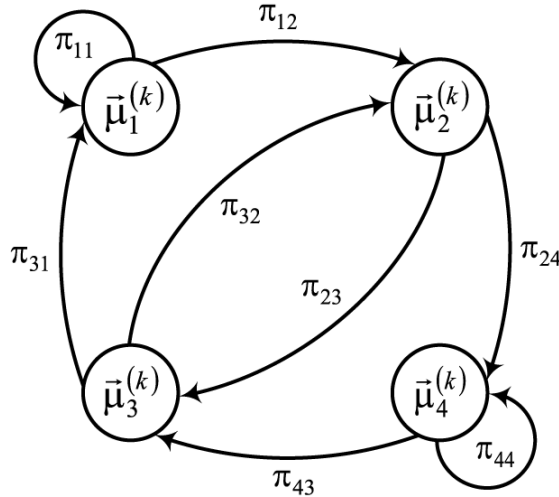


Рис. 1. Диаграмма переходов сложной цепи Маркова ($m = 2, K = 2$).

где $p_i = P(\bar{\mu}_i^{(k)})$ – безусловная вероятность векторного состояния $\bar{\mu}_i^{(k)} = (\mu_n^{(k)} \dots \mu_v^{(k-m+1)})$, $i = 1, K^m$, $n, \dots, v = 1, K$.

В работе [9] показано, что для введенной таким образом простой цепи Маркова соблюдаются разностные уравнения

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k-1)}\Pi = \mathbf{p}^{(0)}\Pi^k, \quad (11)$$

где $\mathbf{p}^{(k)}$ – вектор безусловных вероятностей всех возможных комбинаций из m состояний на k -м шаге. Например, для $m = 2$

$$\mathbf{p}^{(k)} = [P(\bar{\mu}_1^{(k)}), \dots, P(\bar{\mu}_{K^2}^{(k)})]. \quad (12)$$

Апостериорная вероятность состояний многосвязной конечной цепи Маркова

Запишем апостериорную плотность вероятности возможных состояний вектора $\bar{\mu}^{(k+1)}$ [1]:

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(k+1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p^{ac}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}) d\bar{\mu}^{(1)} \dots \bar{\mu}^{(k)}. \quad (13)$$

Многомерная апостериорная плотность вероятности последовательности $\{\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}\}$ находится по формуле обратной вероятности

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}) = cF(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)})p^{ap}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}), \quad (14)$$

$F(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)})$ – многомерная функция правдоподобия, $p^{ap}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)})$ – априорная многомерная плотность вероятности последовательности $\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}$, c – коэффициент нормировки.

Так как шум $n(t_k)$ является некоррелированным (1), то функцию правдоподобия $F(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)})$ можно преобразовать к виду

$$F(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}) = \exp\left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\bar{\mu}^{(i)})\right], \quad (15)$$

где $f(\bar{\mu}^{(i)}) = \ln[F(\bar{\mu}^{(i)})]$.

Для цепи Маркова априорная плотность вероятности $p^{ap}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)})$ может быть определена через произведение [11, 1]

$$p^{ap}(\bar{\mu}^{(1)}, \dots, \bar{\mu}^{(k+1)}) = p(\bar{\mu}^{(1)}) \prod_{i=1}^k w(\bar{\mu}^{(i+1)} | \bar{\mu}^{(i)}), \quad (16)$$

где $w(\bar{\mu}^{(i+1)} | \bar{\mu}^{(i)})$ – плотность вероятности перехода от векторного состояния $\bar{\mu}^{(i)}$ к состоянию $\bar{\mu}^{(i+1)}$.

Подставляя (14–16) в (13), получим

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(k+1)}) = c \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\bar{\mu}^{(i)})\right] p(\bar{\mu}^{(1)}) \prod_{i=2}^k w(\bar{\mu}^{(i+1)} | \bar{\mu}^{(i)}) \right\} d\bar{\mu}^{(1)} \dots \bar{\mu}^{(k)}. \quad (17)$$

Поскольку

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(k)}) = c \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\sum_{i=1}^k f(\bar{\mu}^{(i)})\right] p(\bar{\mu}^{(1)}) \prod_{i=2}^{k-1} w(\bar{\mu}^{(i+1)} | \bar{\mu}^{(i)}) \right\} d\bar{\mu}^{(1)} \dots \bar{\mu}^{(k-1)},$$

то уравнение (17) можно преобразовать к рекуррентному виду, более удобному для вычислений

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(k+1)}) = c \exp\{f(\bar{\mu}^{(k+1)})\} \int_{-\infty}^{\infty} p^{ac}(\bar{\mu}^{(k)}) w(\bar{\mu}^{(k+1)} | \bar{\mu}^{(k)}) d\bar{\mu}^{(k)}. \quad (18)$$

По аналогии с работами [5, 10] представим плотность условной вероятности $w(\bar{\mu}^{(k+1)} | \bar{\mu}_i^{(k)})$ в форме

$$w(\bar{\mu}^{(k+1)} | \bar{\mu}_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{K^m} \pi(\bar{\mu}_j^{(k+1)} | \bar{\mu}_i^{(k)}) \delta(|\bar{\mu}^{(k+1)} - \bar{\mu}_j^{(k+1)}|), \quad (19)$$

где $\bar{\mu}_j^{(k+1)}$ означает j -е векторное состояние цепи Маркова на $(k+1)$ -м такте, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $|\cdot|$ – модуль аргумента, $\pi(\bar{\mu}_j^{(k+1)} | \bar{\mu}_i^{(k)}) \equiv \pi_{ji}$ – элемент матрицы вероятностей переходов вида (8).

Запишем распределение апостериорных вероятностей $p^{ac}(\bar{\mu}^{(k)})$ в виде

$$p^{ac}(\bar{\mu}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{K^m} p^{ac}(\bar{\mu}_i^{(k)}) \delta(|\bar{\mu}^{(k)} - \bar{\mu}_i^{(k)}|) \quad (20)$$

и, подставив (19), (20) в (18), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{K^m} p^{ac}(\bar{\mu}_i^{(k+1)}) \delta(|\bar{\mu}^{(k+1)} - \bar{\mu}_i^{(k+1)}|) = c \exp\{f(\bar{\mu}^{(k+1)})\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{K^m} p^{ac}(\bar{\mu}_j^{(k)}) \delta(|\bar{\mu}^{(k)} - \bar{\mu}_j^{(k)}|) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{K^m} \pi(\bar{\mu}_i^{(k+1)} | \bar{\mu}_j^{(k)}) \right. \\ & \left. \delta(|\bar{\mu}^{(k+1)} - \bar{\mu}_i^{(k+1)}|) \right\} d\bar{\mu}^{(k)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, после интегрирования уравнения (21) получим систему из K^m уравнений для апостериорных вероятностей векторных состояний $p^{ac}(\bar{\mu}_i^{(k+1)})$

$$p^{ac}(\bar{\mu}_i^{(k+1)}) = c \exp\{f(\bar{\mu}_i^{(k+1)})\} \sum_{j=1}^{K^m} p^{ac}(\bar{\mu}_j^{(k)}) \pi_{ji}, \quad i = \overline{1, K^m}, \quad (22)$$

где $f(\bar{\mu}_i^{(k+1)})$ – логарифм функции правдоподобия $\bar{\mu}_i^{(k+1)}$ -го векторного состояния в $(k+1)$ -м такте.

Уравнения нелинейной фильтрации

Рассмотрим в качестве примера синтез уравнений нелинейной фильтрации цепи Маркова со связностью $m=1$ (простая цепь) и $m=2$ (сложная цепь).

Пример 1 ($m=1$).

Пронормируем уравнения (22) на $c \exp\{f(n^{(k+1)})\}$, где $f(n^{(k+1)})$ – логарифм функции правдоподобия выборки белого гауссовского шума, и прологарифмируем результат. Учитывая, что при $m=1$ имеем $\bar{\mu}_i^{(k)} \equiv \mu_i^{(k)}$, получим

$$u_i^{(k+1)} = l(\mu_i^{(k+1)}) + \ln \left(\sum_{j=1}^K \exp(u_j^{(k)}) \pi_{ji} \right), \quad j = \overline{1, K}. \quad (23)$$

В уравнении (23)

$$l(\mu_i^{(k+1)}) = \ln \frac{\exp\{f(\mu_i^{(k+1)})\}}{\exp\{f(n^{(k+1)})\}} = f(\mu_i^{(k+1)}) - f(n^{(k+1)}) -$$

– логарифм отношения правдоподобия j -го состояния $\mu_i^{(k+1)}$, $u_i^{(k+1)} = \ln(p^{ac}(\mu_i^{(k+1)}))$. Распознавание состояний $\mu^{(k+1)}$ осуществляется в соответствии с критерием максимума апостериорной вероятности

$$\mu^{(k+1)} = \mu_i^{(k+1)} \Rightarrow i = \arg \max_{j=1, \dots, K} (u_j^{(k+1)}). \quad (24)$$

Устройство для оценки состояний дискретного параметра μ_k наблюдаемой системы, реализующее уравнение (23) и критерий (24), представлено на рис. 2. Здесь «D» – дискриминатор, «NF» – каналы нелинейного фильтра, «DU» – решающее устройство.

На рис. 2 вектором $\bar{\pi}_N$ обозначен N -й столбец матрицы вероятностей переходов Π , нелинейная функция $z(\bar{u}^{(k)}, \bar{\pi}_N)$ выполняет преобразование

$$z(\bar{u}^{(k)}, \bar{\pi}_N) = \ln \left[\sum_{j=1}^K \exp(u_j^{(k)}) \pi_{jN} \right]. \quad (25)$$

Пример 2 ($m=2, K=2$).

Учитывая, что при $m=2$

$$l(\bar{\mu}_j^{(k+1)}) \equiv l(\mu_r^{(k)} \mu_q^{(k+1)}) = l(\mu_r^{(k)}) + l(\mu_q^{(k+1)}), \quad (26)$$

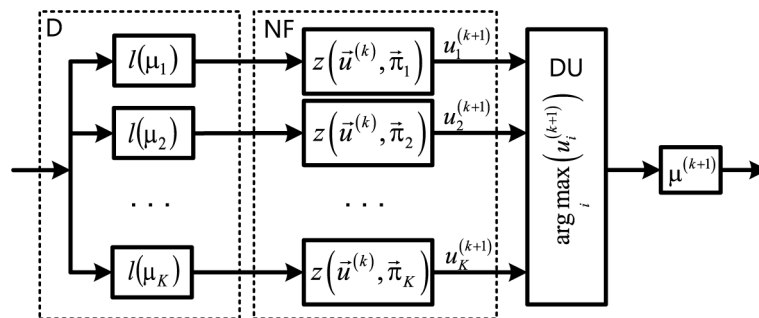


Рис. 2. Структура устройства для оценки состояний дискретного параметра $\mu^{(k)}$ (при $m=1$)

где $j = \overline{1,4}$, $r, q = \overline{1,2}$, $l(\mu_r^{(k)})$ – логарифм отношения правдоподобия r -го состояния $\mu_r^{(k)}$ системы в k -м такте, получим

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= l(\mu_1^{(k)}) + l(\mu_1^{(k+1)}) + \ln \left[\sum_{j=1}^4 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j1} \right], \\ u_2^{(k+1)} &= l(\mu_1^{(k)}) + l(\mu_2^{(k+1)}) + \ln \left[\sum_{j=1}^4 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j2} \right], \\ u_3^{(k+1)} &= l(\mu_2^{(k)}) + l(\mu_1^{(k+1)}) + \ln \left[\sum_{j=1}^4 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j3} \right], \\ u_{4(k+1)} &= l(\mu_2^{(k)}) + l(\mu_2^{(k+1)}) + \ln \left[\sum_{j=1}^4 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j4} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Распознавание векторных состояний $\bar{\mu}_k$ осуществляется по правилу

$$\bar{\mu}^{(k+1)} = \bar{\mu}_i^{(k+1)} \Rightarrow i = \arg \max_{j=1, \dots, K^m} (u_j^{(k+1)}). \quad (28)$$

Приемное устройство, соответствующее уравнениям (27) и критерию (28), представлено на рис. 3. Здесь «D» – дискриминатор приемного устройства, «DU» – решающее устройство.

Поскольку $\bar{\mu}_j^{(k+1)} \equiv (\mu_r^{(k)}, \mu_q^{(k+1)})$, то

$$\mu^{(k+1)} = \begin{cases} \mu_1, (\bar{\mu}^{(k+1)} = \bar{\mu}_1) \vee (\bar{\mu}^{(k+1)} = \bar{\mu}_3) \\ \mu_2, (\bar{\mu}^{(k+1)} = \bar{\mu}_2) \vee (\bar{\mu}^{(k+1)} = \bar{\mu}_4) \end{cases} \quad (29)$$

Эксперимент

Пример 1. Пусть матрица вероятностей переходов (МВП) между дискретными состояниями $\mu^{(k)}$ наблюдаемой системы имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Многосвязную цепь Маркова с вероятностями переходов (30) можно синтезировать с помощью алгоритма, изложенного в работе [12]. Автокорреляционная функция такой цепи представлена на рис. 4.

Система уравнений для оценки дискретных состояний, последовательность которых аппроксимируется цепью Маркова со связностью $m = 2$, имеет вид (27). Структура соответствующего устройства обработки показана на рис. 3.

Результаты статистического моделирования устройства (рис. 3) представлены на рис. 5. Кривая 1 на рис. 5 соответствует вероятности правильного распознавания состояний $\mu^{(k)}$ в зависимости от количества измерений.

Видно (рис.5), что вероятность правильного распознавания состояний $\mu^{(k)}$ увеличивается с ростом количества измерений дискретного параметра наблюдаемой системы. Переходный процесс завершается, ориентировочно, после пяти–шести измерений. При этом выигрыш в вероятности правильного распознавания состояний дискретного параметра $\mu^{(k)}$ составляет 7,7% в устоявшемся режиме.

Следует отметить, что при решении задачи оценки состояний многосвязной цепи Маркова необходима также корректная оценка порядка цепи. Пусть, например, связность цепи Маркова, аппроксимирующей последовательность $\{\mu^{(k)}\}$ с МВП (3) оценена неверно и предполагается, что цепь является простой ($m = 1$). Тогда система уравнений (23) принимает вид:

$$u_1^{(k+1)} = l(\mu_1^{(k+1)}) + \ln \left(\sum_{j=1}^2 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j1} \right),$$

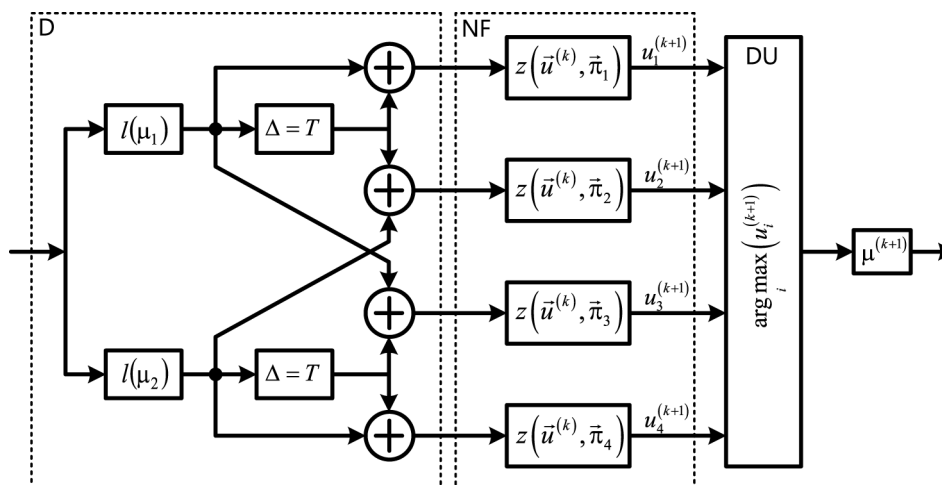


Рис. 3. Структура устройства для оценки состояний дискретного параметра $\mu^{(k)}$ (при $m = 2$, $K = 2$)

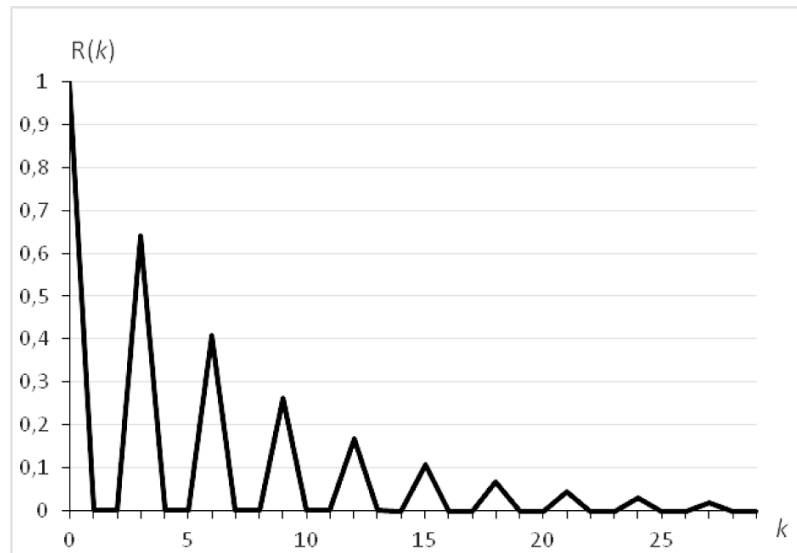


Рис. 4. Автокорреляционная функция цепи Маркова связности $m = 2$ с матрицей вероятностей переходов (30)

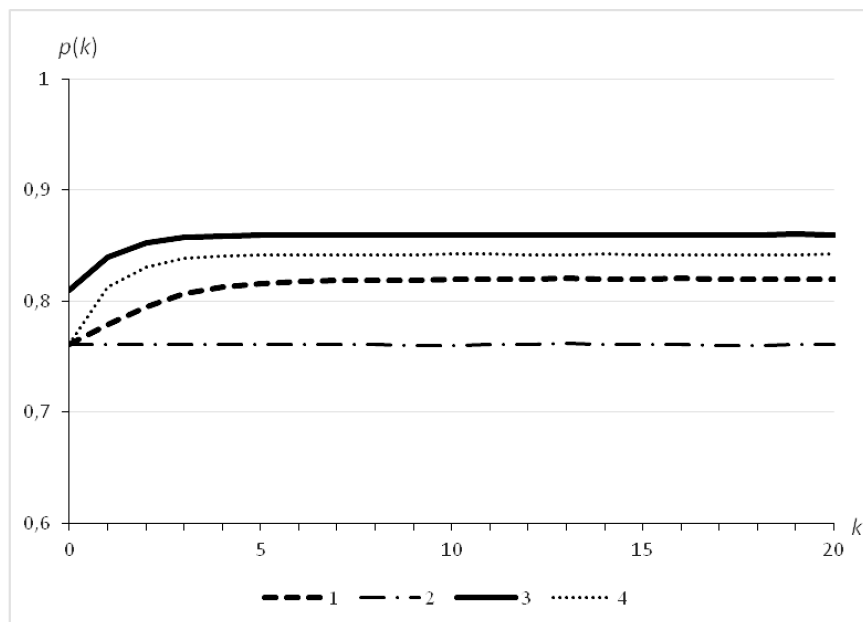


Рис. 5. Вероятность правильного распознавания состояний дискретного параметра $\mu^{(k)}$ (отношение сигнал/шум: -3 дБ)

$$u_2^{(k+1)} = l(\mu_2^{(k+1)}) + \ln \left(\sum_{j=1}^2 \exp(u_j^{(k)}) \pi_{j2} \right). \quad (31)$$

Оценка вероятностей переходов между состояниями $\mu^{(k)}$ при ошибочном предположении, что многосвязная цепь Маркова с МВП (30) является простой цепью, даст следующую МВП:

$$\Pi' = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Кривая 2 на рис. 5 соответствует вероятности правильного распознавания состояний $\mu^{(k)}$ в зависимости от количества измерений при использовании системы уравнений (31) с параметрами (32) и решающего правила (24). Видно, что ошибочная оценка порядка цепи Маркова приводит к снижению вероятности правильного распознавания состояний $\mu^{(k)}$.

По мере приближения вида корреляционной функции дискретного параметра $\mu^{(k)}$ к экспоненциальной зависимости выигрыш от применения моделей цепей Маркова высоких порядков уменьшается.

Пример 2. Пусть матрица вероятностей переходов между дискретными состояниями $\mu^{(k)}$ наблюдаемой системы имеет вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Автокорреляционная функция такой последовательности представлена на рис. 6.

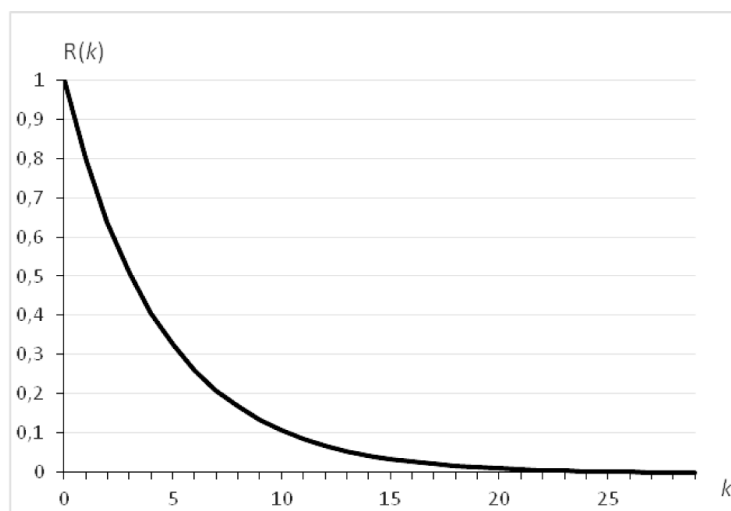


Рис. 6. Автокорреляционная функция цепи Маркова связности $m = 2$ с матрицей вероятностей переходов (34)

Оценка вероятностей переходов между состояниями $\mu^{(k)}$ при предположении, что многосвязная цепь с МВП (34) является простой цепью Маркова:

$$\Pi' = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Кривые 3 и 4 на рис. 5 соответствуют вероятности правильного распознавания состояний $\mu^{(k)}$ при использовании: системы уравнений (27) с решающим правилом (29) и МВП (34) и системы уравнений (31) с решающим правилом (24) соответственно. Выигрыш в установленном режиме при использовании модели цепи Маркова второго порядка в данном случае составляет 2,1% по отношению к результатам оценок при использовании модели простой цепи.

Заключение

Повышение порядка связности m цепи Маркова, аппроксимирующей смену дискретных состояний наблюдаемой системы, приводит к усложнению структуры устройства обработки (рис. 2, рис. 3). Поэтому в общем случае требуется искать компромисс между достоверностью оценки параметров наблюдаемой системы и затратами на реализацию устройства обработки. Применение моделей многосвязных цепей Маркова наиболее эффективно при оценке дискретных состояний наблюдаемой системы, корреляционная зависимость которых существенно отличается от экспоненциальной (рис. 4, рис. 6).

Исследование выполнено в рамках проектной части госзадания Министерства образования и науки РФ, заказ № 8.586.2014/К.

Литература

1. Амиантов, И. П. Избранные вопросы статистической теории связи / И.П. Амиантов. – М.: Сов. радио, 1971. – 416 с.
2. Петров, Е. П. Метод адаптивной фильтрации двоичных импульсных коррелированных сигналов / Е.П. Петров, А.В. Частиков // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46. – № 10. – С. 1155.
3. Петров, Е. П., Медведева Е.В. Нелинейная фильтрация статистически связанных видеопоследовательностей на основе скрытых марковских цепей / Е.П. Петров, Е.В. Медведева // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55. – № 3. – С. 330–339.
4. Трубин, И. С. Нелинейная фильтрация видеопоследовательностей цифровых полутоновых изображений / И.С. Трубин, Е.В. Медведева, О.П. Булыгина // ИКТ. – 2007. – Т. 5. – № 4. – С. 29–36.
5. Частиков, А. В. Метод фильтрации шумоподобных сигналов, сформированных на рекуррентных псевдослучайных последовательностях максимального периода / А.В. Частиков, Е.П. Петров, Д.Е. Прозоров // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46. – № 5. – С. 553.
6. Прозоров, Д. Е. Быстрый поиск шумоподобных сигналов: монография / Д.Е. Прозоров ; под ред. Е. П. Петрова. – Киров: О-краткое, 2006. – 215 с.
7. Doob, J. L. Stochastic processes / J.L. Doob. – New York: Wiley, 1990.
8. Kemeny, J. G. Finite Markov chains / J.G. Kemeny. – New York: Springer-Verlag, 1976.
9. Яншин, В. В. Многосвязные цепи Маркова и их свойства / В.В. Яншин // Радиотехника и электроника. – 1993. – Т. 38. – № 6 – С. 1081–1091.
10. Прозоров, Д. Е. Метод последовательной оценки псевдослучайных сигналов на основе модели многосвязной цепи Маркова [Электронный ресурс] / Д.Е. Прозоров // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. – 2013. – №10. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct13/8/text.pdf>, свободный. – Загл. с экрана.
11. Стратонович, Р. Л. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов / Р.Л. Стратонович // Радиотехника и электроника. – 1960. – Т. 11. – С. 1751–1763.
12. Прозоров, Д. Е. Численное моделирование многосвязной бинарной цепи Маркова / Д.Е. Прозоров, К.В. Плетнёв // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т. 12. – № 2. – С. 8–11.