

Цифровой рекурсивный фильтр, согласованный со сложным сигналом

Digital recursive filter matched with aggregate signal

Филимонов / Filimonov V.

Василий Александрович

(awgn@yandex.ru)

кандидат технических наук.

ФГКВОУ ВО «Военная академия связи имени

Маршала Советского Союза С. М. Буденного» МО РФ,
доцент кафедры.

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: сложный фазоманипулированный сигнал – complex phase-shift key; прямое расширение спектра – direct sequence spread spectrum; цифровая обработка сигналов – digital signal processing; согласованный фильтр – matched filter.

В статье рассматривается вывод алгоритма для сложного вещественного сигнала в видеопоследовательности прямоугольных видеоимпульсов комплексной огибающей сложного фазоманипулированного сигнала, представляющей собой последовательность прямоугольных видеоимпульсов в реальной и мнимой частях. Также представлен аналитический вывод быстрого алгоритма для вещественного и аналитического фазоманипулированного радиосигнала. Все выводы представлены для оцифрованных сигналов.

The article considers derivation of algorithm for aggregate real signal in video sequence of rectangular video pulses, aggregate envelope of phase-shift keyed signal, which envelope represents sequence of rectangular video pulses in real and imaginary parts. Also, analytical derivation of fast algorithm for real and analytical phase-shift keyed signal is presented. All conclusions are given for digitized signal.

Введение

В современных системах связи различного назначения все чаще применяются сложные фазоманипулированные сигналы, называемые сигналами с прямым расширением спектра. Сложность приема данных сигналов с помощью согласованных фильтров вызвана большой вычислительной сложностью, связанной с большим количеством элементов (посылок) различной полярности (фазы), из которых состоит сигнал. В статье представлены аналитические выводы быстрых алгоритмов согласованной фильтрации для сложных бинарных фазоманипулированных сигналов.

Основная часть

В общем виде для оцифрованного сигнала импульсная характеристика фильтра $h(n)$, согласованного с сигналом $x(n)$, представляет собой зеркальное отображение сигнала $x(n)$ относительно оси абсцисс и сдвинутого вправо на его длительность. Для случая, когда сигнал представляет собой вещественную последовательность биполярных импульсов, импульсная характеристика $h(n)$ представляет собой зеркальное отображение данной последовательности относительно центра сигнала. Данный фильтр будет иметь конечную импульсную характеристику (КИХ). Представим нерекурсивную структурную схему согласованного фильтра на последовательность $\{-1, 1, 1\}$ ($N_c=3$), количество отсчетов на каждой элементарной посылке возьмем равным 4 ($T_0/T_s=4$), где T_0 – длительность импульса (элементарной посылки), T_s – период дискретизации. Тогда входной видеосигнал представляет собой последовательность $\{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. На рис. 1 представлен фильтр, согласованный с этой последовательностью.

Передачная функция данного фильтра (рис. 1) представляет собой $[1, 2]$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}, \quad (1)$$

где b_n – коэффициенты передачной функции, имеющие значения 1 или -1 . Тогда данный согласованный фильтр можно представить в виде двух однородных фильтров. Однородным называется КИХ-фильтр у которого все коэффициенты одинаковы, т.е. $b = b_n$. Передачная функция фильтра представляет собой:

$$H(z) = z^0 + z^{-1} + z^2 + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} - z^{-8} - z^{-9} - z^{-10} - z^{-11} = \sum_{n=0}^7 z^{-n} - \sum_{n=8}^{11} z^{-n}. \quad (2)$$

Однородный фильтр имеет две формы реализации: нерекурсивную (1) и рекурсивную. Рекурсивная форма получается как сумма членов конечной геометрической прогрессии с числом членов N [3]:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} bz^{-n} = b \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = b \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad (3)$$

Преобразуем выражение(3) с учетом формулы (2). Тогда передаточная функция согласованного фильтра примет вид:

$$H(z) = \frac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-8}-z^{-12}}{1-z^{-1}}. \quad (4)$$

Соответствующая структурная схема изображена на рис. 2. Заметим, что линия задержки нерекурсивной части фильтра увеличилась на один элемент.

Учитывая свойство суперпозиции линейной фильтрации, приведем формулу (4) к общему знаменателю:

$$H(z) = \frac{1-2z^{-8}+z^{-12}}{1-z^{-1}}. \quad (5)$$

Тогда структурная схема будет выглядеть следующим образом (рис. 3).

Согласованный фильтр, построенный по структурной схеме, изображенной на рис. 3, дает существенный выигрыш в вычислительной сложности. Следует также отметить, что умножение на -1 выполняется изменением знакового разряда и, следовательно, не является операцией умножения. Операция умножения на 2 выполняется с помощью операции побитового сдвига и также не является операцией умножения, что существенно снижает вычислительные затраты. Количество операций сложения и побитового сдвига при использовании рекурсивного согласованного фильтра видеосигнала (рис. 3) находится в прямо пропорциональной зависимости от структуры самой последовательности, записанной в качестве импульсной характеристики фильтра, а точнее – от количества в ней переходов с «1» на «-1» и обратно. В листинге 1 представлен m -файл, выполненный в среде Matlab, в котором представлена работа данных фильтров.

Листинг 1

```
m-файл согласованных фильтров видеосигнала
clc;
clear;
x = [-1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 1]; % входная
последовательность
nol = zeros (1, 10); % нули
x = [nol x nol nol];
% нерекурсивная реализация
h_1 = {1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1}; % их
согласованного фильтра
y_1 = filter(h_1, 1, x); % согласованная
фильтрация
```

```
% Реализация на рекурсивном фильтре
b = [1 0 0 0 0 0 0 0 -2 0 0 0 1]; % коэффи-
циенты числителя
a = [1 -1]; % коэффициенты знаменателя
y_2 = filter(b, a, x); % согласованная филь-
трация
figure; % изображение сигнала на выходах согла-
сованных фильтров
plot(y_1); grid on; hold on;
plot(y_2, 'r');
```

Согласованный фильтр, построенный по струк- турной схеме, изображенной на рис. 3, дает суще- ственный выигрыш в вычислительной сложности по сравнению с согласованным фильтром, построенным по структурной схеме на рис. 1. Количество арифме- тических операций при реализации нерекурсивного согласованного фильтра (рис. 1) равно 12, рекурсивного согласованного фильтра (рис. 3) – равно 5. Заметим, что при увеличении длительности сигнала (числа отсчетов) количество арифметических операций в нерекурсивном алгоритме будет равно $N = N_c T_0 / T_s$, т.е. вычислительная сложность будет возрастать, в рекурсивном алгоритме количество операций не измениться. Однако использование рекурсивного согласованного фильтра не уменьшает количество линий задержки.

Комплексная огибающая сложного фазоманипу- лированного сигнала представляет собой последова- тельности биполярных прямоугольных импульсов в реальной и мнимой частях. Следовательно, согла- сованную фильтрацию необходимо производить отдельно в реальной и мнимой частях с использо- ванием в каждой части согласованного фильтра для вещественного сигнала.

Для выполнения согласованной фильтрации со сложным бинарным фазоманипулированным (ФМн-2) радиосигналом (вещественный или аналитический) необходимо предварительно умножить входной радио- сигнал на комплексную экспоненту $e^{-j \frac{2\pi f_c n}{f_s}}$, где f_c – частота радиосигнала, f_s – частота дискретизации, n – нормированное время, т. е. получить комплексную огибающую [4], и провести фильтрацию комплексным согласованным фильтром для вещественного сигнала, как было описано выше.

По определению передаточную функцию согласо- ванного фильтра для прямоугольного радиоимпульса с частотой f_c можно записать следующим образом:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi f_c n}{f_s}} z^{-n} \quad (6)$$

где N – число отсчетов на длительности импульса $N = T_0 / T_s$ (T_0 – длительность импульса, T_s – период дискре- тизации). Структурные схемы для вещественного и аналитического сигнала представлены на рис. 4 и 5.

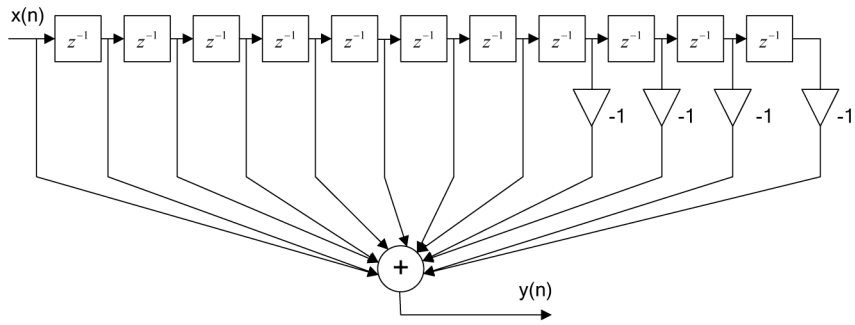


Рис. 1. Структурная схема согласованного фильтра видеосигнала

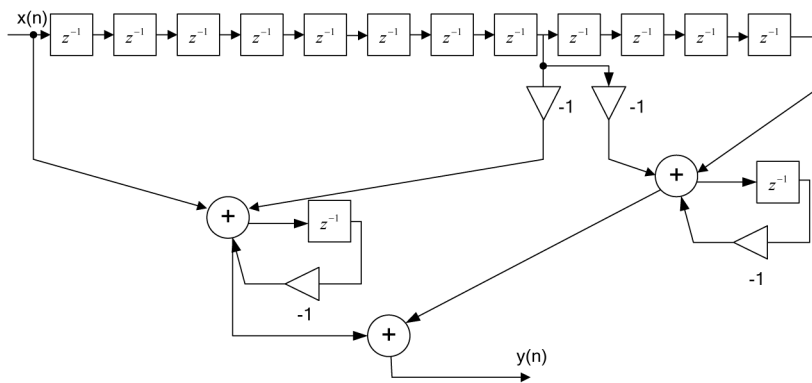


Рис. 2. Структурная схема согласованного фильтра видеосигнала на основе рекурсивной формы однородного фильтра

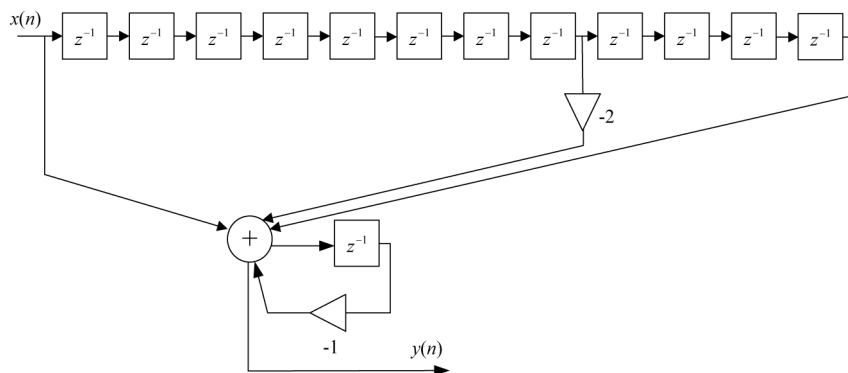


Рис.3. Структурная схема рекурсивного согласованного фильтра видеосигнала

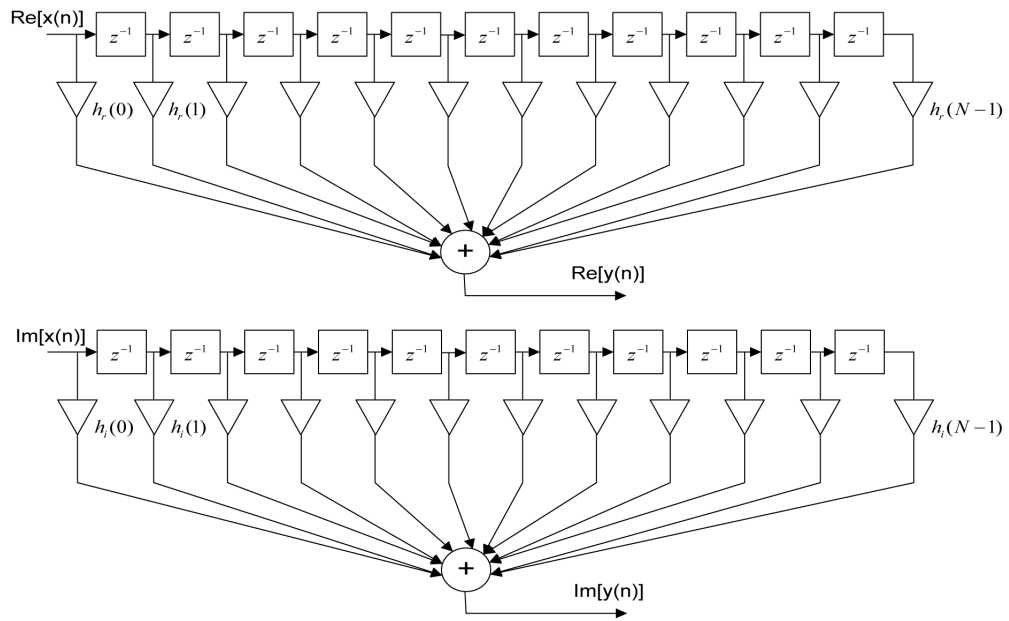


Рис. 4. Структурная схема согласованного фильтра для аналитического радиосигнала, $h_i(n) = \tilde{h}_r(n)$

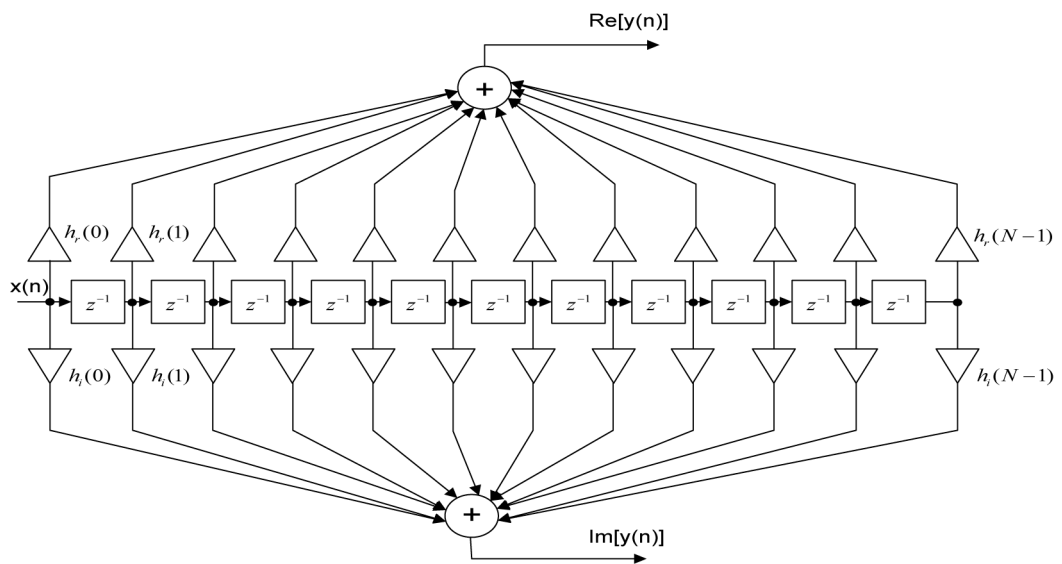


Рис. 5. Структурная схема согласованного фильтра для вещественного радиосигнала, $h_i(n) = \tilde{h}_r(n)$

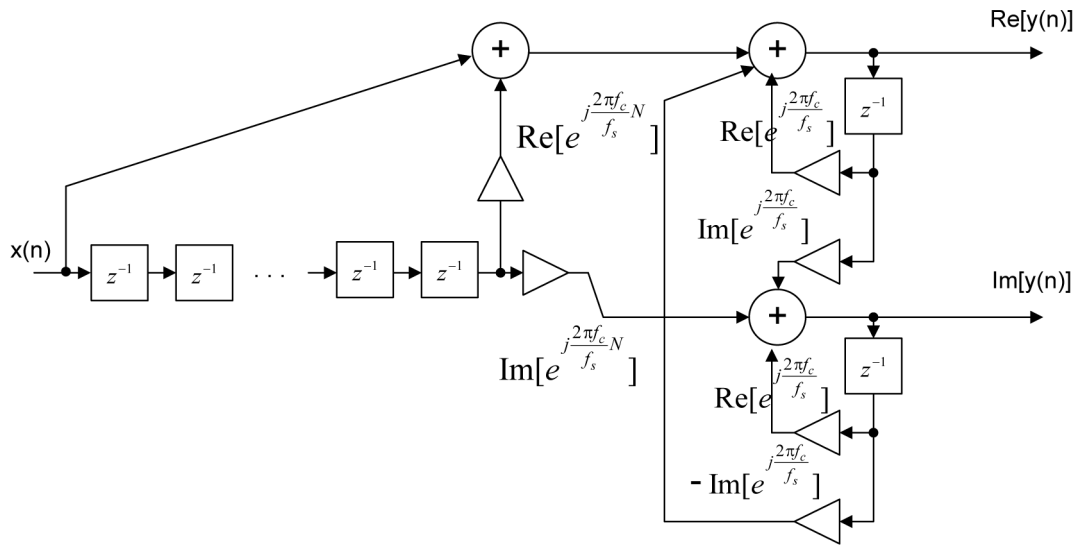


Рис. 6. Структурная схема рекурсивного согласованного фильтра для вещественного радиосигнала

Передаточная функция (6) соответствует нерекурсивной форме КИХ-фильтра. Проведем некоторые преобразования, воспользовавшись свойством сходящейся геометрической прогрессии (3), и перейдем к рекурсивной форме фильтра:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi f_c n}{f_s}} z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z)^{-n} = \\
 &= \frac{1 - (e^{-j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z)^{-N}}{1 - (e^{-j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z)^{-1}} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi f_c N}{f_s}} z^{-N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z^{-1}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Структурная схема фильтра, имеющего передаточную функцию (7) для вещественного и аналитического входного радиосигнала, изображена на рис. 6 и 7.

Входной сигнал поступает одновременно на линию задержки длиной N и на сумматор; при этом в линии задержки осуществляется сдвиг на одну ячейку памяти вправо, и предыдущий отсчет с номером N умножается на комплексный коэффициент и подается на сумматор. Аналогичные преобразования осуществляются и в рекурсивной ветви, где линия задержки представляет собой только один регистр. Выходной сигнал $y(n)$ формируется в сумматоре на три входа.

Рассмотрим передаточную функцию нерекурсивного согласованного фильтра сложного сигнала с ФМн-2:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi f_c n}{f_s}} b_n z^{-n} \quad (8)$$

где b_n – коэффициенты импульсной характеристики видеосигнала.

Произведем преобразования передаточной функции для получения рекурсивного фильтра подобно тому,

как это сделано для видеосигнала. Рассмотрим тот же пример сложного сигнала, тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^7 e^{j\frac{2\pi f_c n}{f_s}} z^{-n} - \sum_{n=8}^{11} e^{j\frac{2\pi f_c n}{f_s}} z^{-n} = \\
 &= \frac{1 - e^{j\frac{2\pi f_c 8}{f_s}} z^{-8}}{1 - e^{j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z^{-1}} - \frac{e^{j\frac{2\pi f_c 8}{f_s}} z^{-8} - e^{j\frac{2\pi f_c 12}{f_s}} z^{-12}}{1 - e^{j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z^{-1}} = \\
 &= \frac{1 - 2e^{j\frac{2\pi f_c 8}{f_s}} z^{-8} + e^{j\frac{2\pi f_c 12}{f_s}} z^{-12}}{1 - e^{j\frac{2\pi f_c}{f_s}} z^{-1}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Структурная схема фильтра, согласно выражения (9) для аналитического и вещественного сигнала, изображена на рис. 8 и рис. 9 соответственно.

Отметим, что количество отводов от линии задержки зависит от структуры сигнала, т. е. от количества переходов с «1» на «-1» и обратно, так же, как и у согласованного фильтра для видеосигнала. Места отводов определяются структурой используемого сигнала. В любом случае первый коэффициент нерекурсивной части фильтра будет равен 1, последний коэффициент

нерекурсивной части фильтра будет равен $e^{j\frac{2\pi f_c N}{f_s}}$, где N – количество отсчетов импульсной характеристики; знак последнего коэффициента будет зависеть от числа отводов, «+» – при нечетном числе отводов, «-» – при четном числе. Значения остальных коэффициентов

числителя будут принимать значения $2e^{j\frac{2\pi f_c N_k}{f_s}}$, где N_k – количество элементов задержки до отвода, знак коэффициента зависит от его порядкового номера: четный номер имеет знак «-», нечетный – «+». Коэф-

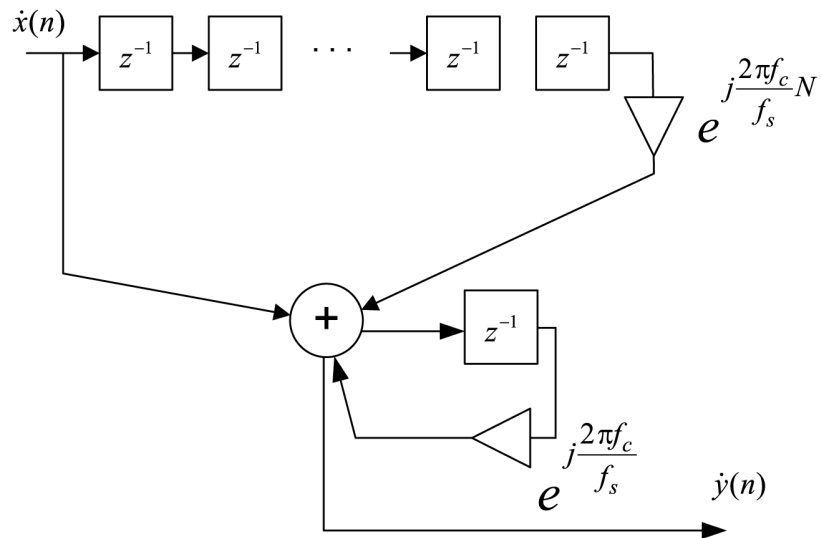


Рис. 7. Структурная схема рекурсивного согласованного фильтра для аналитического радиосигнала

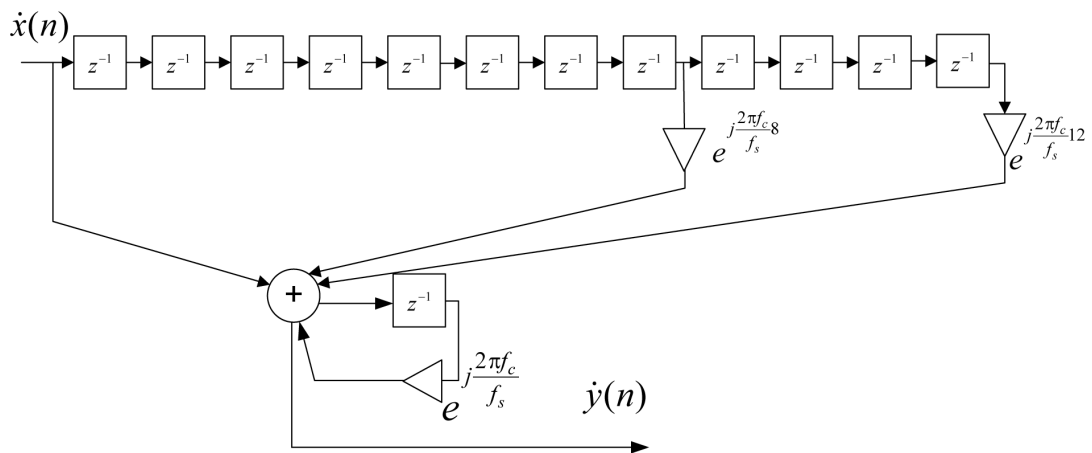


Рис. 8. Структурная схема рекурсивного согласованного фильтра для аналитического входного сигнала с ФМн-2

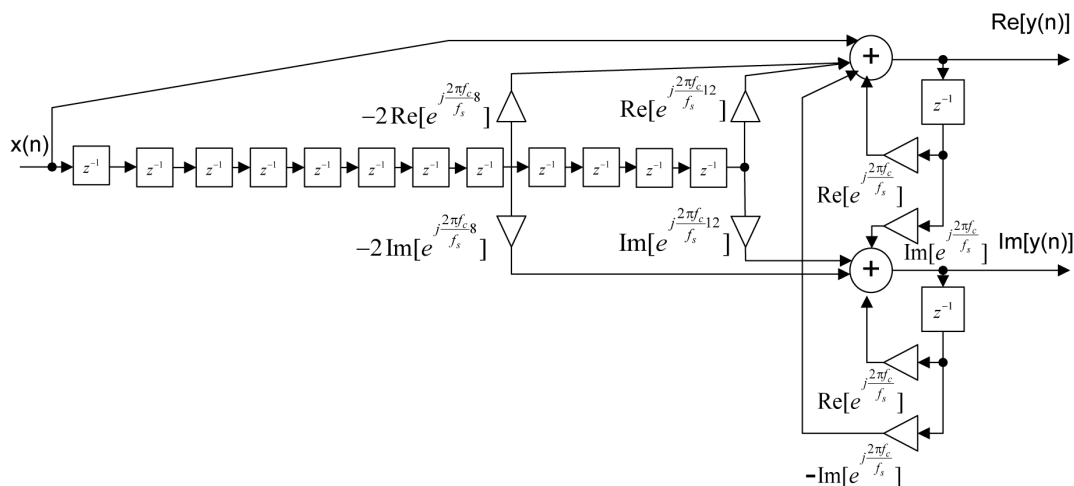


Рис. 9. Структурная схема рекурсивного согласованного фильтра для вещественного входного сигнала с ФМн-2

коэффициент рекурсивной части фильтра всегда равен $e^{j\frac{2\pi f_c}{f_s}}$.

Согласованный фильтр, выполненный согласно (9) (рис. 8 и 9), не дает уменьшения вычислительной сложности по сравнению с согласованным фильтром (5) (рис. 6), можно говорить даже об обратном эффекте, т. к. согласованный фильтр (5) не содержит умножений в отличие от согласованного фильтра (9). Однако для радиосигнала при применении согласованного фильтра (5) необходимо производить умножение на дискретную комплексную экспоненту перед фильтрацией, что в некоторых случаях может быть затруднительно.

Следует также заметить, что все приведенные алгоритмы работают как с вещественными, так и с аналитическими сигналами. На рис. 10 изображен модуль автокорреляционной функции (АКФ) 4-элементного фазоманипулированного сигнала Баркера {1, 1, -1, 1}, представленные три графика получены из одного исходного сигнала различными методами согласованной фильтрации. Исходный файл выполнен в среде Matlab и представлен в листинге 2. Как видно из рисунка все графики совпадают полностью.

Листинг 2

```

m-файл согласованных фильтров радиосигнала
clc; clear;
% **** ДЕМОНСТРАЦИЯ РАБОТЫ ТРЕХ АЛГОРИТМОВ
СОГЛАСОВАННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ****
%*****
fs = 8000; % частота дискретизации
fc = 1800; % частота сигнала
N = 200; % длительность сигнала
l = 1:1:N; l = l./l;
n = [1];
o = [1]*(-1);
    
```

```

barker = [n n n o]; % передаваемая последо-
вательность Баркера 4
    
```

```

b = zeros(1, 800); % нули
x = [b barker b b]; % видеосигнал для передачи
%*****
    
```

```

k = 1:length(x); % нормированное время
s = cos(2*pi*fc*k/fs); % цифровое гармониче-
ское колебание
    
```

```

x = x.*s; % фазоманипулированный сигнал
hdem = 1:1:N; h = [hdem./hdem];
h = [-h h h h]; % коэффициенты импульсной
характеристики видеосигнала
    
```

```

% x = hilbert(x); % преобразование Гильберта
% **** Алгоритм с переносом на нулевую
частоту ****
    
```

```

per = cos(2*pi*k*fc/fs) - i*sin(2*pi*k*fc/
fs); % комплексная экспонента
    
```

```

x1 = x.*per; % перенос на "нулевую" частоту
y = filter(h, 1, x1); % согласованная фильтрация
y = abs(y); % взятие модуля
    
```

```

% **** Алгоритм с рекурсией ****
nol = 1:1:N-1; % организация нулевых коэф-
фициентов
    
```

```

nol = nol*0;
b = [1 nol -2*exp(i*2*pi*N*fc/fs) [nol 0
nol 0 nol]...
    
```

```

exp(i*2*pi*N*4*fc/fs)]; % числитель
a = [1 -exp(i*2*pi*fc/fs)]; % знаменатель
g = filter(b, a, x); % согласованная фильтрация
g = abs(g); % взятие модуля
    
```

```

% **** Алгоритм без рекурсией ****
hr = cos(2*pi*fc*hdem/fs); % отрезок коси-
нусоиды
    
```

```

hi = sin(2*pi*fc*hdem/fs); % отрезок синусоиды
ur = filter([-hr hr hr hr], 1, x); % согласо-
ванная фильтрация реальной части
    
```

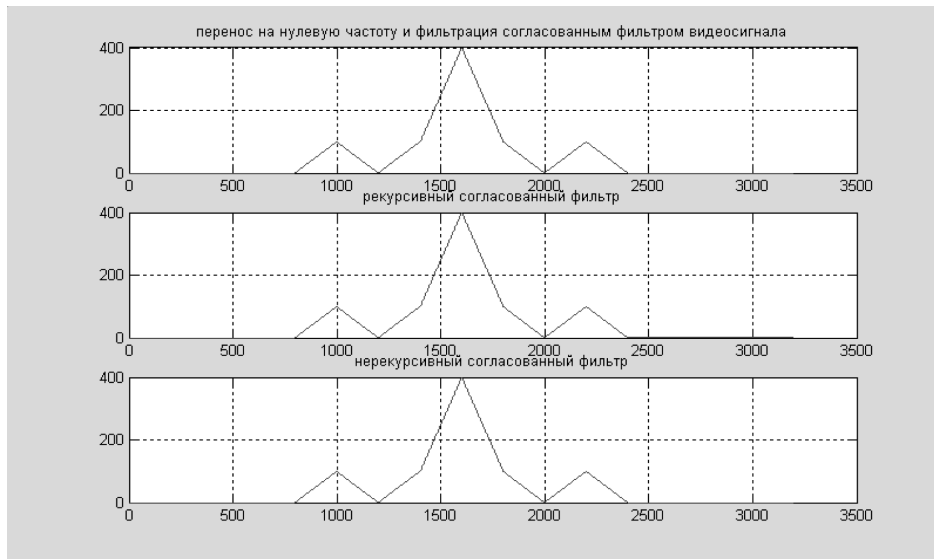


Рис. 10. Модуль АКФ 4-элементного фазоманипулированного сигнала Баркера полученные с помощью:
 а) переноса на нулевую частоту с дальнейшей фильтрацией согласованным фильтром видеосигнала;
 б) рекурсивного согласованного фильтра радиосигнала;
 в) нерекурсивного согласованного фильтра радиосигнала

```

ui = filter([-hi hi hi hi], 1, x); % согласо-
ванная фильтрация мнимой части
u = abs(ur + i*ui); % взятие модуля
subplot(3, 1, 1);
plot(y); grid on;
title ('перенос на нулевую частоту и филь-
трация согласованным фильтром видеосигнала');
subplot(3, 1, 2);
plot(g); grid on;
title ('рекурсивный согласованный фильтр');
subplot(3, 1, 3);
plot(u); grid on;
title ('нерекурсивный согласованный фильтр');
    
```

Порядок построения согласованного КИХ-фильтра рекурсивной реализации для сложного сигнала с ФМн-2:

1) записать сигнал в виде обратной последовательности «1» и «-1», если первый элемент сигнала отрицательный произвести инверсию сигнала;

2) составить линию задержки из N регистров и начало ее соединить с сумматором;

3) отводы от линии задержки на сумматор производятся через множитель при каждой смене знака последовательности;

4) коэффициенты умножения (кроме последнего) определяются по формуле $2e^{j\frac{2\pi f_c N_k}{f_s}}$, где N_k – количество элементов задержки до отвода, знак коэффициента зависит от его порядкового номера: четный номер имеет знак «-», нечетный – «+»

5) последний (N -й) коэффициент нерекурсивной части фильтра равен $e^{j\frac{2\pi f_c N}{f_s}}$, знак коэффициента будет

зависеть от числа отводов, «+» – при нечетном числе отводов, «-» – при четном числе.

б) организуется рекурсивная часть из одного регистра и одного отвода с коэффициентом $e^{j\frac{2\pi f_c}{f_s}}$.

Заключение

Представленные в статье рекурсивные алгоритмы согласованной фильтрации со сложными бинарными фазоманипулированными сигналами по сравнению с нерекурсивной реализацией дают значительный вычислительный выигрыш. Стоит отметить что, несмотря на рекурсивную реализацию, данные фильтры остаются КИХ-фильтрами, что обеспечивает их потенциальную устойчивость. Количество операций (за исключением задержки) зависит от структуры сложного сигнала, для которого строится согласованный фильтр. Приведенные листинги программ подтверждают правильность теоретических выкладок.

Литература

- Айфичер, Э. С. Цифровая обработка сигналов. Практический подход [пер. с англ.] / Э.С. Айфичер, Б.У. Джервис. – Изд. 2-е. – М.: Вильямс, 2004. – 992 с.
- Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов [пер. с англ.] / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
- Смирнов, В. И. Курс высшей математики. / В.И. Смирнов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 628 с.
- Филимонов, В. А. Теория электрической связи: учеб. пособие / В.А. Филимонов, О.А. Остроумов. – СПб.: ВАС, 2015. – 200 с.