Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов

Adjusting the hyper-delta distribution in the theory of random processes

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
почетный профессор ВКА им. А. Ф. Можайского,
действительный член МАИ.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: гипердельтное распределение вероятностей – hyper-delta probability distribution; случайные немарковские процессы – random non-Markovian processes; метод моментов – the method of moments; случайная величина – random value; преобразование Лапласа – Laplace transform; преобразование Фурье – Fourier transform; характеристическая функция – characteristic function.

Ранее предложенное для моделирования случайных процессов гипердельтное распределение вероятностей применимо только для положительных случайных величин. На основе использования преобразования Фурье и характеристической функции область его применения распространена на всю область задания случайных величин.

The hyper-delta probability distribution proposed elsewhere to model random processes is only applicable to positive random values. Applying Fourier transform and the characteristic function, its applicability is expanded to cover the full range of random values prescribed.

Введение

В прикладных задачах теории массового обслуживания, теории эффективности, теории надёжности, исследовании операций и др. представление моделей однородными марковскими процессами с конечным или счётным числом состояний – наиболее простым классом случайных процессов – часто не соответствует реальной действительности. Оно оправдывается в основном достигнутой развитостью математического аппарата, применяемого при исследовании марковских моделей систем.

Представление моделей систем немарковскими случайными процессами влечёт за собой использование более сложного математического аппарата. В настоящее время известны различные аналитические методы исследования систем немарковского типа. Одним из достаточно эффективных в приложениях оказался метод «комплексных вероятностей» Кокса [1]. В нём вводятся фиктивные этапы (состояния) случайного процесса, описываемые комплексными величинами. При этом вероятности состояний являются реальными. На основе данного метода в статье [2] предлагалось аппроксимационное представление произвольных (гладких) плотностей распределений в виде гиперэкспоненциальной плотности с комплексно-сопряжёнными весовыми коэффициентами и параметрами. Однако применение этого представления при большом числе фаз становится достаточно трудоёмким как в аналитическом, так и численном виде. Также этому методу свойственны иногда явления колебательности получаемых аппроксимаций на хвостах распределений. В статье [3] был предложен гипердельтный метод аппроксимации. Отмечались широкие возможности использования метода как в аналитическом виде, так и при компьютерном моделировании случайных процессов.

Сущность метода [3] заключалась в представлении произвольной плотности распределения $f(t)$, сосредоточенной на временной оси, приближённо в виде

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta(t - T_i), \tag{1}$$

где C_i – вероятности, удовлетворяющие условию $\sum_i^n C_i = 1$, а δ – дельта-функция Дирака. Точность подобного представления будет тем выше, чем больше целая величина n. Для определения искомых постоянных величин C_i, T_i можно воспользоваться методом моментов. Если $n > 2$, то значения указанных величин определяются численно. Когда $n = 2$, значения указанных величин находятся аналитически из следующей системы уравнений:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1T_1 + C_2T_2 = \nu_1, \quad C_1T_1^2 + C_2T_2^2 = \nu_2,$$
$$C_1T_2^3 + C_2T_2^3 = \nu_3, \tag{2}$$

в которой ν_i – i - й начальный момент случайной величины, распределённой с плотностью вероятности $f(t)$.

Из системы уравнений (2) получаем:

$$C_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{3\nu_2\nu_1 - \nu_3 - 2\nu_1^3}{\sqrt{\nu_3^2 - 6\nu_3\nu_2\nu_1 - 3\nu_2^2\nu_1^2 + 4\nu_3\nu_1^3 + 4\nu_2^3}}\right),$$

$$T_{1,2} = \frac{\nu_3 - \nu_2\nu_1 \mp \sqrt{\nu_3^2 - 6\nu_3\nu_2\nu_1 - 3\nu_2^2\nu_1^2 + 4\nu_3\nu_1^3 + 4\nu_2^3}}{2(\nu_2 - \nu_1^2)}. \quad (3)$$

В [3] для различных распределений вероятностей при известных ν_1, ν_2, ν_3 найдены значения C_1, C_2, T_1, T_2, представленные в таблице. Представлена графически аппроксимация экспоненциального распределения. Кроме того, приведены примеры моделирования простой сети массового обслуживания и аналитического решения одной задачи надёжности. Изложены особенности численного компьютерного моделирования случайных процессов с применением гипердельтного распределения.

В статье [4] авторами приводятся следующие новые дополнительные результаты:

– гипердельтное распределение можно применять для аппроксимации распределений, сосредоточенных на $(-\infty, \infty)$,

– его можно применять и для аппроксимации распределений, обладающих разрывом первого рода,

– выполнено численное решение при аппроксимации распределений с большим количеством начальных моментов (13 моментов).

Следует отметить, что первый результат был получен при условии, что все рассматриваемые начальные моменты теоретического распределения положительны. А так как система уравнений (2) и все системы уравнений при $n > 2$ в статье [3] были получены на основе записи выражений для дельта-функций на положительной оси $[0, \infty)$, это означает, что все величины $T_i > 0$. При этом условии применялось преобразование Лапласа и производилось его дифференцирование для определения начальных моментов левых частей уравнений системы (2). Это означает, что правильность вывода о возможности аппроксимации распределений на интервале $(-\infty, \infty)$ авторами [4] не установлена. Поэтому цель данной статьи показать, каким образом выполнять данную аппроксимацию в корректном виде.

Ответ следует из указания на величину интервала $(-\infty, \infty)$, о чём ранее некоторые авторы [4] были проинформированы, но в своей публикации не учли этого. Устраним эту неточность, используя преобразование Фурье и характеристическую функцию.

Необходимые математические сведения

Ранее для получения выражений (1–3) использовалось одностороннее преобразование Лапласа. Левые части уравнений (2) были получены дифференцированием изображения Лапласа (1) и приравниванием производных по переменной Лапласа к нулю. При этом значения начальных моментов v_i предполагались положительными.

Если в выражении (1) при любом числе n хотя бы одна дельта-функция имела бы в аргументе знак «плюс», что означает расположение её на отрицательной оси, то применение преобразования Лапласа было бы невозможным. Возможным выходом при этом условии было бы использование либо двустороннего преобразования Лапласа, как это делается при решении интегрального уравнения Винера-Хопфа на основе метода факторизации, либо применение преобразования Фурье [5]. На наш взгляд, выбор второго способа является в силу его простоты наиболее предпочтительным. Поэтому нами используется характеристическая функция:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} w(x)dx, \quad (4)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а $w(t)$ – плотность вероятности. Разлагая экспоненту под знаком интеграла в ряд, получаем:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + itx + \frac{(itx)^2}{2!} + \frac{(itx)^3}{3!} + \cdots\right)w(x)dx =$$
$$= 1 + it\nu_1 + \frac{(it)^2}{2!}\nu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\nu_3 + \cdots. \quad (5)$$

Поэтому величина k-го начального момента плотности $w(t)$ находится по формуле:

$$\nu_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, \quad (6)$$

где $\varphi^{(k)}(0)$ – значение в нуле k-й производной характеристической функции.

Поэтому вместо системы уравнений (2), получаемой на основе преобразования Лапласа только для положительных сдвигов во всех дельта-функциях, входящих в выражение вида (1), можно записать аналогичную систему уравнений для равенства начальных моментов на основе преобразования Фурье для характеристических функций. На примере, когда $n = 2$, будем иметь:

$$C_1\varphi_1(0) + C_2\varphi_2(0) = 1,$$
$$C_1\frac{\varphi_1^{`}(0)}{i} + C_2\frac{\varphi_2^{`}(0)}{i} = \nu_1,$$
$$C_1\frac{\varphi_1^{``}(0)}{i^2} + C_2\frac{\varphi_2^{``}(0)}{i^2} = \nu_2,$$
$$C_1\frac{\varphi_1^{```}(0)}{i^3} + C_2\frac{\varphi_2^{```}(0)}{i^3} = \nu_3. \quad (7)$$

Система (7) в отличие от системы (2) может иметь как положительные, так и отрицательные начальные моменты ν_k, $k = 1, 2, 3$. В самом простейшем случае, когда характеристическая функция представляет собой единичную функцию Хевисайда (для вырожденного распределения вероятностей), на правой полуоси $[0, \infty)$

имеем $\varphi(t) = e^{ita}$, а на левой полуоси $(-\infty,0]$ – $\varphi(t) = e^{-ita}$. Выражения для соответствующих дельта-функций принимают вид $\delta(t-a)$ или $\delta(t+a)$, где a – величина сдвига на положительной или отрицательной полуоси.

При известных моментах ν_k, с учётом части или всех отрицательных из них, после решения системы уравнений (7) можно составить выражение для плотности вероятности гипердельтного распределения, а затем применять его для определения необходимых показателей. Это справедливо не только в случае учёта трёх начальных моментов, но и при любом значении n, что можно подтвердить численными вычислениями, как это выполнено в [4].

Пример 1. Задана плотность нормального распределения:

$$f(t) = 1/\sqrt{2\pi}\exp-((t-m)^2/2\sigma^2), \tag{8}$$

со следующими значениями параметров $m = -10$ ед., $\sigma = 2$ ед. Требуется представить её приближённо на основе использования гипердельтного распределения с учётом трёх начальных моментов ν_1, ν_2, ν_3. Вычисляя значения этих моментов, получаем $\nu_1 = -10$ ед., $\nu_2 = 104$ ед.^{2}, $\nu_3 = -1120$ ед^3. Система уравнений для определения значений параметров аппроксимации примет прежний вид (1):

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 1,\\ &C_1T_1 + C_2T_2 = \nu_1,\\ &C_1T_1^2 + C_2T_2^2 = \nu_2,\\ &C_1T_1^3 + C_2T_2^3 = \nu_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя в систему значения указанных моментов и решая её, получаем:

$$C_1 = \frac{1}{2},\quad C_2 = \frac{1}{2},\quad T_1 = -8 \text{ ед.},\quad T_2 = -12 \text{ ед.}$$

Используя свойства преобразования Фурье и характеристической функции, запишем аппроксимационное гипердельное представление функции плотности вероятностей в следующем виде:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(\delta(t+8) + \delta(t+12)).$$

Укажем ещё раз, что данное аппроксимационное представление (10) невозможно было бы получить, если бы использовалось для этой цели одностороннее преобразование Лапласа. Проиллюстрируем графически функцию распределения и дополнительную функцию для данной плотности вероятности (10). Будем иметь:

$$\begin{aligned} &F_a(t) = \frac{\Phi(t+8)}{2} + \frac{\Phi(t+12)}{2},\\ &P_a(t) = \frac{\Phi(-t-8)}{2} + \frac{\Phi(-t-12)}{2},\\ &F_a(t) + P_a(t) = 1, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Phi(x)$ – единичная функция. На рис. 1 и 2 представлены аппроксимации функции распределения и дополнительной функции распределения. На рис. 3 совместно показаны соответственно графики аппроксимируемой и аппроксимированной функций. Рассмотренный пример подтверждает корректность выполнения приближённого представления аналитических выражений функций распределения теории вероятностей на основе гипердельтного распределения не только на положительном луче оси абсцисс, но и на луче отрицательном. Это означает, что гипердельная аппроксимация, использующая свойства интегрального преобразования Фурье характеристической функции, применима на всей вещественной оси $(-\infty,\infty)$. Отсюда также следует, что если нам известны численные значения необходимого числа начальных моментов с точностью до знаков, то с их помощью на основе данной аппроксимации можно приближённо построить искомое распределение вероятностей. Рассмотренный пример подтверждает корректность выполнения приближённого представления аналитических выражений функций распределения теории вероятностей на основе гипердельтного распределения не только на положительном луче оси абсцисс, но и на луче отрицательном. Это означает, что гипердельная аппроксимация, использующая свойства интегрального преобразования Фурье и характеристической функции, применима на всей вещественной оси $(-\infty,\infty)$. Отсюда также следует, что если нам известны численные значения необходимого числа начальных моментов с точностью до знаков, то с их помощью на основе данной аппроксимации можно приближённо построить искомое распределение вероятностей.

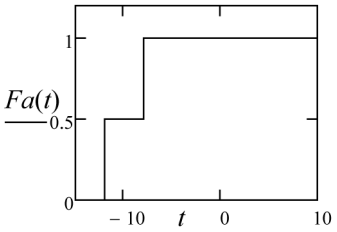

Рис. 1

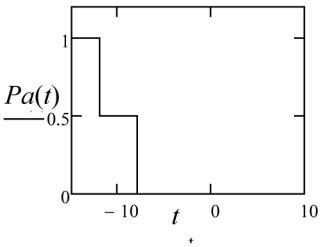

Рис. 2

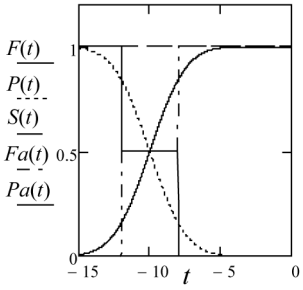

Рис. 3

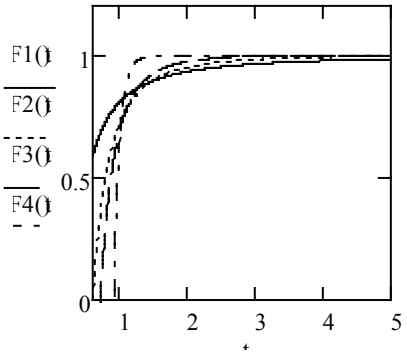

Рис. 4

Замечание. Следует отметить тот факт, что в условиях нашего примера моменты ν_1, ν_3 одновременно становятся отрицательными. Поэтому значение выражения под корнем в (3) остаётся неизменным, а величины T_1, T_2, принимающие в [1] значения $T_1 = m - \sigma$, $T_2 = m + \sigma$, в данном примере легко определяются как $T_1 = -m + \sigma$, $T_2 = -m - \sigma$. А так как $m = -10$ ед., $\sigma = 2$ ед., то значения этих величин $T_1 = -8$ ед., $T_2 = -12$ ед., то есть они совпадают со значениями, определёнными численно при решении уравнений (7). Поступая подобным образом, можно найти значения данных параметров и для других распределений, как это было выполнено в [3] и составить аналитические выражения для аппроксимированных плотностей вероятностей.

Пример 2. Используя результаты исследований, приведённых в статье [6], рассмотрим аппроксимацию «тяжёлого распределения» Парето гипердельтным распределением. Функция распределения Парето представляется в виде:

$$F(t) = 1 - (\frac{K}{t})^{\alpha}, t \geq K, \qquad (12)$$

где K параметр масштаба, α параметр формы распределения. На рис. 4 представлены функции (12) при следующих значениях параметров (начало оси абсцисс не с 0, а с 0,6):

$$F1(t) = 1 - (\frac{K1}{t})^{\alpha 1}, K1 = 0,333, \alpha 1 = 1,5; F2(t) = 1 - (\frac{K2}{t})^{\alpha 2},$$
$$K2 = 0,6, \alpha = 2,5; F3(t) = 1 - (\frac{K3}{t})^{\alpha 3},$$
$$K3 = 0,714, \alpha 3 = 3,5; F4(t) = 1 - (\frac{K4}{t})^{\alpha 4}, K4 = \frac{\alpha 4 - 1}{\alpha 4} = \frac{10,5}{11,5}, \alpha 4 = 11,5.$$

Из рисунка следует, что наиболее близким к «прямоугольному распределению» является распределение $F4(t)$, у которого наибольшее значение параметра формы $\alpha 4 = 11,5$. Ему соответствует наименьшее значение коэффициента вариации $\eta 4 = 0,109$ из представленных распределений. Рассмотрим аппроксимацию первых трёх распределений из четырёх гипердельтным распределением на основе системы уравнений (9) и следующих из неё формул (3). Для функции $F1(t)$ получаем следующие значения параметров:

$$C_1 = 0,5 + 2,769i, C_2 = 0,5 - 2,769i, T_1 =$$
$$= -0,111 + 0,314i, T_2 = -0,111 - 0,314i, \qquad (13)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Из данных (13) следует, что рассматриваемая функция распределения не может быть аппроксимирована гипердельтным распределением.

Для функции $F2(t)$ получаем следующие значения параметров:

$$C_1 = 0,976, C_2 = 0,024, T_1 = -4,735, T_2 = 1,135. \qquad (14)$$

Из представленных данных следует, что гипердельтная аппроксимация второй функции распределения возможна, её плотность вероятности равна

$$f2(t) = 0,024\Delta(t - 1,139) + 0,976\Delta(t + 4,739), \qquad (15)$$

а функция распределения –

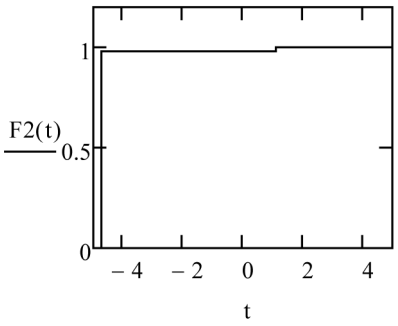

Рис. 5

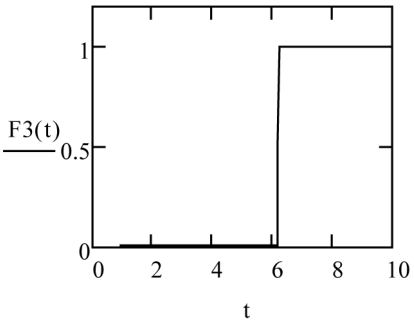

Рис. 6

$$F2(t) = 0{,}024\Phi(t - 1{,}139) + 0{,}976\Delta(t + 4{,}739). \quad (16)$$

Для функции $F3(t)$ получены следующие значения параметров:

$$C_1 = 7{,}035 \cdot 10^{-3},\ C_2 = 0{,}993,\ T_1 = 0{,}963,\ T_2 = 6{,}2. \quad (17)$$

Плотность вероятности и функция распределения будут равны:

$$f3(t) = 7{,}035 \cdot 10^{-3}\,\Delta(t - 0{,}963) + 0{,}993\Delta(t - 6{,}2),$$
$$F3(t) = 0{,}007035\Phi(t - 0{,}963) + 0{,}993\Phi(t - 6{,}2). \quad (18)$$

Функция распределения $F3(t)$ показана на рис. 6.

Следует отметить, что значения начальных моментов у функций были равны:

$$F1(t) - \nu_1 = 1,\ \nu_2 = -0{,}333,\ \nu_3 = -0{,}037;\ F2(t) - \nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1{,}8,$$
$$\nu_3 = -1{,}08;\ F3(t) - \nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1{,}19,\ \nu_3 = 2{,}551.$$

Ранее отмечалось [4], что достоинством гипердельного распределения является возможность его использования при моделировании случайных процессов с весьма малыми значениями коэффициента вариации (вырожденном и разрывном распределениях), чего нельзя указать для распределения Парето и его гипердельтной аппроксимации. Это свойство может иметь место лишь при больших значениях параметра α, что и подтверждает пример функции распределения $F4(t)$.

Заключение

Гипердельтная аппроксимация распределений вероятностей по методу моментов среди ряда исследователей получила применение при решении ими прикладных задач. Это определяется, прежде всего, удобством вычисления некоторых интегралов. Но основное применение она находит при решении таких задач, в которых сложное для исследований немарковское представление случайных процессов более целесообразно заменять марковским.

Недостатком ранее предложенного гипердельтного распределения являлось то, что его можно было применять только для распределений вероятностей с положительными значениями случайной величины. В предлагаемой статье этот недостаток предложено устранить. Для этой цели рекомендовано распространить применение метода аппроксимации и для отрицательных значений случайной величины.

Предложенная коррекция метода основывается на применении вместо преобразования Лапласа преобразования Фурье и характеристической функции. Рассмотрены примеры аппроксимаций нормального распределения, сосредоточенного на отрицательной полуоси вещественных чисел, а также сравнительного «тяжёлого распределения» Парето.

Литература

1. Cox, D. R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes / D.R. Cox //Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – Vol. 51. – No. 2. – P. 313–319.

2. Смагин, В. А. Об одном методе исследования немарковских систем / В.А. Смагин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1983. – № 6. – С. 31–36.

3. Смагин, В. А. О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения / В.А. Смагин, Г.В. Филимонихин // АВТ. – 1990. – № 1. – С. 25–31.

4. Бубнов, В. П. Применение гипердельтного распределения в имитационных моделях микропроцессорных систем управления и диагностики электровозов / В.П. Бубнов, В.И. Сафонов, С.А. Сергеев // Вестник Всероссийского научно-исследовательского и проектно-конструкторского института электровозостроения. – 2015. – № 1 (69). – С. 39–47.

5. Дюге, Д. Теоретическая и прикладная статистика / Д. Дюге; пер. с франц. В.М. Калинина. – М: Наука, 1972. – 383 с.

6. Рыжиков, Ю. И. Теория очередей и распределение Парето / Ю.И. Рыжиков // Сборник трудов ВКА имени А. Ф. Можайского. – 2015. – № 648.