Структура оптимального алгоритма фильтрации пространственно-временных сигналов

Structure of the optimum algorithm to filtering space-temporary signal

Бутырский / Butyrsky E.
Евгений Юрьевич
(evgenira88@mail.ru)
доктор физико-математических наук, профессор.
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
профессор кафедры теории управления.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: функция – function; аппроксимация – approximation; динамическая система – dynamic system; сигнал – signal; процесс – process; алгоритм – algorithm; матрица – matrix; фильтрация – filtration.

В статье рассматривается обобщенный алгоритм пространственно-временной фильтрации сигналов, основанный на методах теории нелинейной фильтрации. В статье используется подход, основанный на теории марковских процессов.

The generalized algorithm of spatio-temporal filtration of signals, based on the methods of theory of nonlinear filtration, is examined in the article. In the article taken approach, based on the theory of markovsky processes.

Введение

Существует два принципиально различных подхода к решению задач анализа выходного сигнала линейной системы, на вход которой действует линейный стохастический сигнал. Оба подхода допускают обобщение в рамках теоретико-группового подхода к представлению сигналов [1].

Первый подход базируется на интегральном представлении линейного стохастического сигнала. Известно, что класс линейных сигналов замкнут относительно линейных (системных) преобразований. Поэтому выходной сигнал линейной системы, на вход которой поступает линейный сигнал, также является линейным. Это свойство позволяет достаточно просто получить как прямое, так и косвенное описание сигнала на выходе линейной системы [4].

Второй подход использует математический аппарат марковских процессов. Предполагается, что входной сигнал и система являются независимо друг от друга компонентами векторных марковских процессов. Вместе они представляются как компоненты более общего, векторного марковского процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). Компонентой этого процесса является и выходной сигнал системы. Косвенное описание (вероятностные характеристики) получают путем решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова или Колмогорова-Феллера. Этот подход широко используется при описании систем в пространстве состояний.

Описание системы в пространстве состояний с помощью стохастических дифференциальных уравнений является наиболее полным и дает возможность с единых позиций рассматривать задачи управления, обнаружения и оценивания и решать их на базе теории условных марковских процессов, разработанной Р.Л. Стратоновичем, и возможно для любых систем: непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных [4, 5, 12–15]. Кроме того, описание с помощью СДУ не ограничивается рамками линейных сигналов.

Сущность представления случайного процесса стохастическими дифференциальными уравнениями состоит в том, что он интерпретируется как выходной сигнал некоторой гипотетической динамической системы (ее называют формирующим фильтром), возбуждаемый стандартным случайным процессом с известными характеристиками, в качестве которого обычно выбирается белый шум. Формирующий фильтр относится к моделям феноменологического типа, то есть он отражает не реальный физический механизм формирования случайного процесса, а лишь его наблюдаемые статистические свойства.

С развитием теории условных марковских процессов появилась возможность существенно развить теорию оптимального приема в обработки сигналов, решить задачи оптимальной фильтрации для весьма большого класса сигналов, которые раньше принципиально не могли быть решены. Это объясняется тем, что марковская теория оптимальной нелинейной фильтрации свободна от существенных ограничений, налагаемых другими теориями [2–5, 10–16].

Методы марковской теории оптимальной нелинейной фильтрации позволяют определить оптимальные алгоритмы обработки сигналов, когда последние нелинейно зависят от передаваемых сообщений, что характерно для сигналов. Налагаемые же методами оптимальной нелинейной фильтрации ограничения на марковость совокупности наблюдаемых и оцениваемых процессов не являются жесткими, так как многие реальные случайные процессы можно с достаточной степенью точности аппроксимировать многомерными марковскими процессами. К примеру, всякий гауссовский случайный процесс, спектральная плотность которого представима дробно-рациональной функцией, представляет собой компоненту многомерного марковского процесса.

В частном случае, когда уравнение состояния и наблюдения линейны относительно вектора состояния, уравнения марковской теории оптимальной фильтрации вырождаются в соответствующие уравнения оптимальной линейной фильтрации Калмана-Бьюси [3, 12–16].

Высокая эффективность марковских моделей сигналов и помех известна из работ по марковской теории нелинейной фильтрации [2, 4, 12–16]. На основе последней построена теория обнаружения сигналов, использующая понятие условного марковского процесса. Использование только марковских моделей не ограничивает круг решаемых задач, так как они позволяют с требуемой точностью аппроксимировать практически любой случайный процесс.

Постановка задачи оптимальной фильтрации пространственно-временных сигналов

Имеющиеся работы по синтезу алгоритмов временной и пространственно-временной обработки ориентированы, в основном, на аддитивное взаимодействие сигнала и помехи. Реально их взаимодействие носит значительно более сложный характер, а аддитивное представление лишь в некоторых случаях является достаточно хорошим приближением. Поэтому остро стоит проблема синтеза алгоритма фильтрации сигналов, учитывающих не только симметрию преобразований в области определения, но и характер взаимодействия информационных сигналов и различных помех в области значений.

В настоящем пункте на основе байесовского подхода получены дифференциальные уравнения для апостериорных математического ожидания и дисперсии параметров гауссовского случайного поля (ГСП), управляемых СДУ. На основе предложенных моделей выведены уравнения оптимального приемника пространственно-временных сигналов (ПВС), основанные на принципах нелинейной фильтрации параметров ГСП и обнаружения сигнала [2, 15, 16].

Пусть на некоторой апертуре антенны G трехмерного эвклидова пространства E_3, наблюдается скалярное поле:

$$u(t,\ r)=\Theta\left[\Phi(s_1,N)-V(N)\right]+V(N)+n(t),$$
$$t\in[0,T],\quad r\in G. \tag{3}$$

Ненаблюдаемый случайный процесс $a(t)$ описывается векторным СДУ в пространстве состояний:

$$\frac{da(t)}{dt}=F\left[a(t),\ t\right]+B(t)n_a(t),\quad a(0)=a_0, \tag{4}$$

где $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – соответственно вектор-столбец $(k\times 1)$ и матрица $(k\times k)$ известных функций времени;

$n_a(t)$ – k-мерный вектор белого нестационарного гауссова шума с нулевым средним;

a_0 – k-мерный вектор случайных начальных условий, распределенных по нормальному закону

$$p(a_0)=\mu_0\exp\left\{-(a_0-m_0)^T K^{-1}(a_0-m_0)\right\}; \tag{5}$$

$$K=M\left\{(a_0-m_0)(a_0-m_0)^T\right\};$$
$$m_0 - \text{константа} - M\{a_0\}=m_0.$$

Положим, что пространственно-временная помеха (ПВП) описывается в виде векторного СДУ в частных производных:

$$\frac{\partial N(t,\ r)}{\partial t}=A_r N(t,r)+P(t,r)n_n(t,r), \tag{6}$$

где: A_r–$(k\times k)$ – матричный, в общем случае нелинейный оператор (интегральный, дифференциальный или интегро-дифференциальный) над пространственными переменными;

$P(t,r)$ – $(k\times m)$ – мерная матрица;

$n_n(t,r)$ – гауссовский, коррелированный во времени процесс с известной матрицей пространственной корреляции.

Предположим также, что для вектора состояния системы уравнений помехи (6) заданы начальные и граничные условия:

$$M\{N(t_0,\ r)\}=\hat{N}_0(r), \tag{7}$$

$$M\left\{\left[N(t_0,r)-N_0(t,r)\right]\left[N(t_0,r)-\hat{N}_0(t,r_1)\right]^T\right\}=D_0(r,\ r_1), \tag{8}$$

$$b_r N(t,\ r)=0,\quad r\in R, \tag{9}$$

где: b_r – некоторый пространственный оператор соответствующей размерности, определяющий начальные условия на границе Г наблюдаемой пространственной области G.

Обозначим:

$$Z\left[t,\ r,\ a(t),\ N(t,r),\ \theta\right]= \\ =\theta\left\{\Phi\left[s_1(t,r,a(t))\right]-V(N)\right\}+V(N). \quad (10)$$

С учетом последнего обозначения (3) запишем в виде:

$$u(t,\ r)=Z\left[t,r,a(t),N(t,\ r),\ \theta\right]+n(t,r). \quad (11)$$

Синтез структуры оптимального пространственно-временного фильтра

Для гауссовского поля помех и нелинейного уравнения наблюдения (11) уравнение фильтрации помехи, оптимального в квазилинейном приближении и определяющего наилучшую среднеквадратическую оценку помехи $N(t,\ r)$, имеет вид [15]:

$$\frac{\partial\hat{N}(t,\ r)}{\partial t}=A_r\hat{N}(t,r)+\int_G D(t,r,r_1)z_d(t)dr_1. \quad (12)$$

$$\hat{N}(0,\ r)=\hat{N}_0(t,r).$$

В свою очередь, матрица пространственной корреляции ошибок фильтрации $\hat{D}(t,r,r_1)$ определяется из уравнения:

$$\frac{\partial\hat{D}(t,\ r,\ r_1)}{\partial t}=A_r\hat{D}+\hat{D}A_r+PRP^T- \\ -\iint_G\hat{D}\,Я\left\{\frac{\partial Z^T}{\partial N}Я^T[u-Z]\right\}\hat{D}drdr_1 \quad (13)$$

где: $Я\left[h\left(t,x(t)\right)\right]$ – матрица Якоби, соответствующая вектору помещенному внутри квадратных скобок;

$R^+(t,r_1,r_2)$ – матричная функция, определяемая из равенства:

$$\int_G R^+Rdr_2=I\delta(r-r_1). \quad (14)$$

Функция $z_d(t)$, характеризующая выходной сигнал оптимального дискриминатора, определяется выражением [15]:

$$z_d(t)=\int_G\left(\frac{\partial Z^T}{\partial N}\right)R^+(u-Z)dr_1. \quad (15)$$

Введем в последнем выражении обозначение:

$$z_{on}(t)=\left(\frac{\partial Z^T}{\partial N}\right)R^+(u-Z). \quad (16)$$

Тогда, после раскрытия скобок в (15), получим формулу, определяющую выходной эффект фильтра

$$z_d=\int_G uZ_{on}dr_1-q_1 \quad (17)$$

где: $q_1=\partial q/\partial N$ – изменение энергетического отношения сигнал-помеха.

Оптимальную текущую оценку $a(t)$ найдем максимизацией логарифма функционала апостериорной плотности вероятности, который в рассматриваемом случае можно представить в следующем виде [15]:

$$J_1=\mu-\frac{1}{2}(a_0-m_0)^TK^{-1}(a_0-m_0)+ \\ +\int_0^T n_a^T\Psi^{-1}n_a dt+\int_0^T\iint_G[u-Z]^TR^+[u-Z]dr_1dr_2dt. \quad (18)$$

Присоединяя к функционалу (18) дифференциальные связи (4), при помощи k-мерного вектора $\lambda(t)$ неопределенных множителей Лагранжа получаем расширенный функционал:

$$J=J_1-\int_0^T\lambda^T\left(F(t,a(t)+B(t)n_a(t)-\frac{da(t)}{dt}\right)dt. \quad (19)$$

безусловный максимум которого имеет место при оптимальных значениях a_0, $a(t)$, $\lambda(t)$. Варьируя J по a_0, $a(t)$ и $n_a(t)$ и учитывая при формировании $a(t)$ уравнение (4), получаем решение в виде двухточечной краевой задачи:

$$\frac{d\hat{a}}{dt}=F-B\psi B^T\hat{\lambda}.\ , \quad (20)$$

$$\hat{a}_0=m_0-K\hat{\lambda}_0, \quad (21)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial a}\hat{\lambda}+\iint_G(u-Z)R^+\frac{\partial Z}{\partial a}dr_1dr_2. \quad (22)$$

$$\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_T=0. \quad (23)$$

Канонические уравнения (20) и (22) при найденных начальном (21) и конечном условиях, при помощи метода «инвариантного погружения» [8, 9], преобразуем в систему нелинейных СДУ для апостериорных кумулянтов ненаблюдаемых компонент. В соответствии с общей идеей метода «погружаем» решение краевой задачи (20), (22) при однородном конечном условии (21) в общее, получающееся, если положить $\lambda_T=C$. В этом случае решение (20) при $t=T$ можно записать в виде:

$$\hat{a}(t,\ \hat{\lambda})(\hat{\lambda}_T=0)=E(C,T), \quad (24)$$

где: $E(C,T)$ – k-мерная искомая векторная функция.

Вычислим в линейном приближении приращение $\Delta E(C,T)$ функции $E(C,T)$, обусловленное малыми приращениями ее аргументов:

$$\Delta E(C,T) \approx \frac{\partial E(C,T)}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial E(C,T)}{\partial C^T}\Delta C\,. \qquad (25)$$

Из уравнений (20) и (22) с учетом (24) находим:

$$\Delta E(C,T) = F\Delta T - B\Psi\hat{B}C\,\Delta T \qquad (26)$$

$$\Delta C = -\frac{\partial F}{\partial E}C\Delta T + \iint_G (u-Z)R^+\frac{\partial Z}{\partial E}dr_1 dr_2 \Delta T. \qquad (27)$$

Подставляя соотношения (26) и (27) в выражение (25), получим уравнение инвариантного погружения для $E(C,T)$:

$$F - B\Psi B^T C = \frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial C^{\mathrm{T}}}\left[-\frac{\partial F^T}{\partial E}c + \iint_{\mathrm{G}} (u-Z)R^+\frac{\partial Z}{\partial E}dr_1 dr_2\right]. \qquad (28)$$

Решение $E(C,T)$ уравнения (28) обладает тем свойством, что при $C \to 0$, $E(C,T)$ стремится к оценке вектора параметров $a(T)$. Таким образом, вектор c является малым параметром и решение (28) целесообразно искать в виде степенного ряда по этому параметру:

$$E(C,T) = \hat{a}(T) + \sum_i \hat{V}_{\mathrm{i}}(T)C^i. \qquad (29)$$

где: $V_i(T)$ – матрицы, которые необходимо определить.

Подставляя (29) в (28) и используя метод неопределенных коэффициентов, получаем незамкнутую систему уравнений относительно $a(T)$ и $V_i(T)$, i=1, 2... Но если в выражении (29) учитывать только линейные члены, имеем после замены T на t, замкнутую систему уравнений:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = F + \hat{V}_1 \iint_G (u-Z)R^+\frac{\partial Z}{\partial a}dr_1 dr_2\,, \qquad (30)$$

$$\frac{d\hat{V}_1}{dt} = B\Psi B^T + \hat{V}_1\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial a^T}\hat{V}_1 + $$
$$+\hat{V}_1\frac{\partial}{\partial a^T}\iint_G (u-Z)R^+\frac{\partial Z}{\partial a}dr_1 dr_2 d\hat{V}_1\,. \qquad (31)$$

Для определения начальных условий к уравнениям (30) и (31) сопоставим соотношения (29), (19), (23). В результате находим, что:

$$\hat{a}_0 = m_0,\ \hat{V}_1 = K\,.$$

Таким образом, уравнение (30) описывает изменение апостериорного математического ожидания, а уравнение (31) – апостериорной дисперсии фильтруемого процесса.

В состав обнаружителя входит собственно блок фильтрации помех при гипотезах H_1 и H_0, блок оценки параметров гидроакустического сигнала, а также блок вычисления ФОП. Блок оценки параметров включает в себя многомерные дискриминатор и цепи сглаживания, а также блок вычисления апостериорной дисперсии. Выходные сигналы блока точности регулируют коэффициент преобразования дискриминатора. Устройство последнего определяется вторым слагаемым в правой части (30). В состав дискриминатора входят два блока опорных полей:

$$Z_0 = \int_{\mathrm{G}} R^+\frac{\partial Z}{\partial a}dr_1,\quad Z = \int_{\mathrm{G}} R^+\frac{\partial Z}{\partial a}dr_2\,. \qquad (32)$$

Оба блока опорных полей управляются текущими оценками параметров с выхода измерителя. Необходимо отметить, что в формировании опорного поля участвует и оценка помехи, которая вырабатывается в блоке фильтрации помехи при гипотезе H_1.

Алгоритм фильтрации пространственно-временного сигнала

Техническая реализация предложенного алгоритма фильтрации-обнаружения предполагает формирование антенной амплитудно-фазового распределения опорного поля, которое, в свою очередь, изменяется в соответствии с текущей оценкой помехи и вектора неизвестных параметров самого поля. Отсюда следует, что характеристика направленности всей антенной системы должна изменяться по форме и ориентации в соответствии с изменением оценок помехи.

Для получения вектора оценок помехи необходимо решить соответствующее дифференциальное уравнение (12). Однако предварительно надо найти решение интегро-дифференциального уравнения (13) и произвести оценку для апостериорной дисперсии. Уравнение относится к уравнениям типа Риккати. Хотя методы решения подобных уравнений достаточно известны, решение задач непрерывной фильтрации полей наталкивается на значительные математические трудности. В результате реализация полученных алгоритмов непрерывной обработки пространственно-временных сигналов оказывается достаточно сложной и требующей значительных аппаратных затрат.

Наибольшее распространение методы линейной и нелинейной фильтрации получили при дискретной форме представления сигналов и полей. Дискретизация может осуществляться с помощью представления отсчетами по пространству с интервалом Δr и по времени с интервалом Δt. Удобство такого представления объясняется тем, что частные производные по r в (6) заменяются конечными разностями. В результате СДУ в частных производных заменяются обыкновенными СДУ, решения которых обладают марковскими свойствами в каждой точке пространства. К полученным таким образом уравнениям применимы алгоритмы фильтрации марковских процессов.

Отсчеты ПВС наблюдаются и обрабатываются с помощью цифровых средств в дискретные моменты

времени t_k. Используя стандартный прием представления ДУ в разностной форме, вместо уравнений вида:

$$\frac{da}{dt} = F + P_a Q_a, \tag{33}$$

$$\frac{dN}{dt} = A + P_u Q_u, \tag{34}$$

где $a(t)$ – вектор состояния в различных точках пространства;

$Q_a(t)$ – вектор отсчетов шумового поля возмущений;

$Q_u(t)$ – вектор отсчетов ПВП, получим уравнения:

$$a(h+1) = f_1(h,\ a) + M_1(h)W_1(h), \tag{35}$$

$$N(h+1) = f_2(h,\ a) + M_2(h)W_2(h), \tag{36}$$

$$f_1(h,\ a) = a(h) + F(a_h,\ t_h)\Delta t,$$

$$f_2(h, N) = N(h) + A\ (N_h,\ t_h)\Delta t,$$

$$Q_1(h)\ W_1(h) = P_a(t)\, n_{ai}(t_h)\Delta t,$$

$$Q_2(h)\ W_2(h) = P_u(t) n_{ui}(t_h)\Delta t,$$

$$M\left\{\ W_1(h)\ W_1^T(h)\right\} = R_1(h)\delta_{hk},$$

$$R_1(h) = \frac{1}{\Delta t} R_a(t_h),\quad h = [1,\ H];$$

$$M\left\{\ W_2(h)\ W_2^T(h)\right\} = R_2(h)\delta_{hk},$$

$$R_2(h) = \frac{1}{\Delta t} R_N(t_h),\quad h = [1,\ H].$$

С учетом введенных обозначений для произвольного пространственного канала i можно записать для временного сигнала и помехи в i-ом канале следующее выражение:

$$a_i(h+1) = \Phi_{1i}\left[a_i(h)\right] + Q_{1i}(h) W_{1i}(h),\ i = \overline{1,\ M}, \tag{37}$$

$$N_i(h+1) = \Phi_{2i}\left[a_i(h)\right] + Q_{2i}(h) W_{2i}(h),\ i = \overline{1,\ M}, \tag{38}$$

где: $\Phi_{1i}\left[a_i(h)\right]$, $\Phi_{2i}\left[a_i(h)\right]$ – разностные операторы по i, соответственно для сигнальной составляющей поля и помехи в i-ом пространственном канале;

$Q_{1i}(h)$, $Q_{2i}(h)$ – i-ые диагональные блоки матриц:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & Q_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_{1M} \end{pmatrix},\quad Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & Q_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_{2M} \end{pmatrix}.$$

Аналогичные преобразования можно выполнить и для уравнения наблюдения (11):

$$u_i(h) = Z\left[h,\ a(h),\ N_i(h),\ \Theta\right] + n_i(h). \tag{39}$$

Удобство дискретных представлений моделей полей в форме разностных уравнений заключается также в том, что они позволяют учесть негауссовский характер плотности распределения вероятности помех в каждом из пространственных каналов.

В результате уравнения для оценки сигнальной составляющей поля и помехи эквивалентные (12) имеют вид:

$$\hat{a}_i = \Phi_{1i}\left(\hat{a}_i + \sum_i^M \sum_k^M \hat{D}_1 \frac{\partial Z^T}{\partial a} z(u_1 - Z)\right), \tag{40}$$

$$\hat{D}_i = \sum_i^M \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}\hat{D}_1 + \hat{D}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}\right) -$$

$$\sum_{l,q}^M \hat{D}_1 W\left(\frac{\partial Z^T}{\partial a} z(u_l - Z)\, z^T(u_q - Z)\frac{\partial Z}{\partial a^T}\right)\hat{D}_1 + M_{1i} R_{1ik} M_{1k}.$$

$$\hat{a}(0,\ r_i) = \hat{a}_{0i},\quad \hat{D}_1(0,\ r_i,\ r_k) = \hat{D}_{10ik}. \tag{41}$$

Аналогичные уравнения получаем и для фильтрации помехи. Причем необходимо отметить, что в этом случае будет два канала фильтрации, соответствующие гипотезам H_1 и H_0:

$$\hat{N}_i = \Phi_{21}\hat{N}_i + \sum_l^M \sum_k^M \hat{D}_2 \frac{\partial Z^T}{\partial N} z\,(u_l - Z), \tag{42}$$

$$\hat{D}_2 = \sum_l^M \left(\frac{\partial \Phi_{2i}}{\partial N_l}\hat{D}_2 + \hat{D}_2 \frac{\partial \Phi_{2i}}{\partial N_l}\right) - \tag{43}$$

$$-\sum_{l,k}^M \hat{D}_2 M\left(\frac{\partial Z^T}{\partial N} z\,(u - Z) z^T(u - Z)\frac{\partial Z}{\partial N^T}\right)\hat{D}_2 + M_{2i} R_{2ik} M_{2k}.$$

Уравнения (40)–(43) описывают квазиоптимальный алгоритм уравнения пространственно-временной обработки ПВС на фоне пространственно-распределенных помех и шумов. Полученный алгоритм зависит от r и поэтому определяется числом точек дискретизации поля по r. Оценка поля в каждой точке r_i зависит от наблюдений и оценок во всех точках наблюдения, что объясняется «пространственной динамикой» уравнений. Оба уравнения связаны между собой и поэтому должны решаться совместно, поскольку зависят от вектора наблюдений. Указанная взаимосвязь является специфической особенностью задач нелинейной фильтрации в отличие, к примеру, от линейного фильтра Калмана, для которого дисперсия ошибки (коэффициент усиления) может быть вычислена предварительно. Это является следствием того, что в уравнении Риккати, описывающем дисперсию в фильтре Калмана, отсутствуют наблюдения, а входят только априорные сведения.

Полученные в результате уравнения совпадают с известными уравнениями нелинейной фильтрации с тем лишь отличием, что наблюдаемые данные $u_i(h)$ входят не непосредственно, а через функцию $z(t)$, которая представляет собой производную от логарифма функции правдоподобия $L_i(n_h)$. Как известно [15], в

общем случае ФОП задает структуру оптимального дискриминатора при синтезе устройств оценивания методами нелинейной фильтрации.

Для нелинейного уравнения наблюдения (47) выходное напряжение дискриминаторов в блоках фильтрации помехи и вектора параметров каждого парциального канала имеет следующий вид:

$$z_{2dl} = \frac{\partial Z^T}{\partial N} z(u_l - Z), \tag{44}$$

$$z_{1dl} = \frac{\partial Z^T}{\partial a} z(u_l - Z), \tag{45}$$

Таким образом, можно сказать, что блок формирования оценок пространственного сигнала и блок формирования оценок помехи i-го пространственного канала включает в себя $3M$ дискриминаторов со сглаживающими фильтрами. Структура оптимального сглаживающего фильтра задается СДУ и воспроизводит схему формирования процесса $a(t, r)$ и помехи $N(t,r)$. Коэффициенты усиления $D(\cdot)$ характеризуют апостериорную матрицу погрешностей демодуляции.

Примеры использования уравнений фильтрации

Проиллюстрируем применение общих уравнений фильтрации для синтеза оптимального пеленгатора. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть апертура G образована l ненаправленными датчиками поля расположенными вдоль оси x с координатами (x_1, x_2). На апертуру падает плоская волна, возбужденная удаленным источником сигнала:

$$z(t,\ x,\ b,\ d) = s\left[t + \frac{x}{c}\cos(b) + d\right],\ a(t) = \left(b(t),\ d(t)\right), \tag{46}$$

где: $b(t)$ – угол прихода волн, изменяющийся вследствие движения источника и отсчитываемый между перпендикуляром к фронту волны и осью x;

$d(t)$ – случайные флуктуации задержки сигнала;

$s(\cdot)$ – известная функция времени с ограниченным спектром.

В рассматриваемом случае интегрирование по пространственным координатам в уравнениях фильтрации (10), (11) заменяется суммированием соответствующим образом обработанных сигналов с каждого элемента решетки $u(t, x_i, a(t))$.

Положим, что шумовой фон $n(t, x)$ приближенно можно считать δ-коррелированным по времени и пространству и, следовательно:

$$R(t,\ x_1,\ x_2) = G(t,\ x)\delta(t - t_1)\delta(x - x_1), \tag{47}$$

где: $G(t, x)$– пространственно-временная спектральная плотность шумового фона.

Таким образом, фильтрации подлежат компоненты вектора $a(t) = \left(b(t),\ d(t)\right)^T$, фигурирующие в уравнении (46). Будем полагать, что они управляются следующей системой уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_b \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_b & 0 \\ 0 & B_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_b \\ n_d \end{pmatrix}, \tag{48}$$

Белые шумы $n_b(t)$ и $n_d(t)$ статистически независимы и, следовательно, матрица $\psi(t)$ имеет диагональную форму:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{bb} & 0 \\ 0 & \psi_{dd} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

С учетом вышеуказанных предположений формулы (30) и (31) можно записать в следующем матричном виде (для упрощения записи зависимость от времени показывать не будем):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_b \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left\{\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \hat{b}}\right\}_{1\times l} \\ \left\{\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \hat{d}}\right\}_{1\times l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & G_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_l \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$W = u - \hat{z},\ \ \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left\{\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \hat{b}}\right\}_{1\times l} \\ \left\{\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \hat{d}}\right\}_{1\times l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & G_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_l \end{pmatrix}.$$

$1\times l$ и $l\times l$ – размерность векторов и матриц в правой части уравнения соответственно.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{bb} & 0 \\ 0 & B_{dd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{bb} & 0 \\ 0 & \psi_{dd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{bb} & 0 \\ 0 & B_{dd} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_b}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_d}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_b}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_d}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial b} & \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу Q. Перемножая слева направо, получаем вектор:

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\sum_i\left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial z_i}{\partial b}\right) + \hat{V}_{bd}\sum_i\left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial z_i}{\partial d}\right) \\ \hat{V}_{db}\sum_i\left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial z_i}{\partial b}\right) + \hat{V}_{dd}\sum_i\left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial z_i}{\partial d}\right) \end{pmatrix}.$$

Подставляя значение матрицы Q в уравнение (50), имеем выражения, определяющие оценку параметров

d и b:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{b}}{dt} \\ \dfrac{d\hat{d}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_b \\ \hat{f}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial b} \right) + \hat{V}_{bd}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial d} \right) \\ \hat{V}_{db}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial b} \right) + \hat{V}_{dd}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial d} \right) \end{pmatrix}, \tag{51}$$

где

$$\frac{\partial z_i}{\partial b} = -\frac{x_i}{c}\frac{\partial s_i}{\partial b}\sin(b); \quad \frac{\partial z_i}{\partial d} = \frac{\partial s_i}{\partial d}.$$

Найдем дисперсию ошибки определения параметров сигнала. Вычислим первое, второе и третье слагаемое в выражении (51). Соответственно имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \psi_{bb}B_b^2 & 0 \\ 0 & \psi_{dd}B_d^2 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_b}{\partial b} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial f_d}{\partial d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\dfrac{\partial f_b}{\partial b} & \hat{V}_{bd}\dfrac{\partial f_d}{\partial d} \\ \hat{V}_{db}\dfrac{\partial f_b}{\partial b} & \hat{V}_{bb}\dfrac{\partial f_d}{\partial d} \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_b}{\partial b} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial f_d}{\partial d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\dfrac{\partial f_b}{\partial b} & \hat{V}_{bd}\dfrac{\partial f_b}{\partial b} \\ \hat{V}_{db}\dfrac{\partial f_b}{\partial d} & \hat{V}_{dd}\dfrac{\partial f_d}{\partial d} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Найдем четвертый член в выражении (50). Для этого представим его в следующем виде:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \text{ и тогда } A_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial b} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial b} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial d} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix}, \tag{55}$$

Откуда получаем

$$A_4 = \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\dfrac{\partial Q_1}{\partial b} & \hat{V}_{bd}\dfrac{\partial Q_1}{\partial d} \\ \hat{V}_{db}\dfrac{\partial Q}{\partial b} & \hat{V}_{dd}\dfrac{\partial Q}{\partial d} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Таким образом, выражение (50) представляется как:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{V}_{bb} & \hat{V}_{bd} \\ \hat{V}_{db} & \hat{V}_{dd} \end{pmatrix} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{57}$$

Уравнения для дисперсии ошибки оценивания параметров b и d описываются выражениями:

$$\frac{\partial \hat{V}_{bb}}{\partial t} = \psi_{bb}B_b^2 + \hat{V}_{bb}\left(2\frac{\partial f_b}{\partial b} + \frac{\partial Q_1}{\partial b} \right), \tag{58}$$

$$\frac{\partial \hat{V}_{dd}}{\partial t} = \psi_{dd}B_d^2 + \hat{V}_{bb}\left(2\frac{\partial f_d}{\partial d} + \frac{\partial Q_2}{\partial d} \right), \tag{59}$$

Для коэффициента корреляции имеем уравнение:

$$\frac{\partial \hat{V}_{bd}}{\partial t} = \hat{V}_{db}\left(\frac{\partial f_b}{\partial b} + \frac{\partial f_d}{\partial d} \right) + \hat{V}_{db}\frac{\partial Q_1}{\partial d}, \quad \frac{\partial \hat{V}_{db}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}_{bd}}{\partial t}. \tag{60}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial b} = \hat{V}_{bb}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b^2} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial d} \right)^2 \right] + \hat{V}_{bd}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b \partial d} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial d}\frac{\partial z_i}{\partial d} \right) \right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial d} = \hat{V}_{bb}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b \partial d} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial b \partial d} \right) \right] + \hat{V}_{bd}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b^2} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial d} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial b} = \hat{V}_{bb}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b^2} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial b} \right)^2 \right] + \hat{V}_{bd}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b \partial d} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial d}\frac{\partial z_i}{\partial d} \right) \right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial d} = \hat{V}_{bb}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial b^2} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial b \partial d} \right) \right] + \hat{V}_{dd}\left[\sum_i \left(\frac{u_i - z_i}{G_i}\frac{\partial^2 z_i}{\partial d^2} \right) - \sum_i \frac{1}{G_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial d} \right)^2 \right].$$

Структура оптимального измерителя строится в соответствии с уравнениями (51). Синтезированный при принятых допущениях измеритель получен на базе общего алгоритма фильтрации и справедлив не только для дискретных, но и непрерывно распределенных в пространстве датчиков поля.

Пример 2. На апертуру антенны падает плоская волна, возбужденная, как и в предыдущем примере, точечным источником сигнала. Модель сигнала на входе антенны имеет вид:

$$z(t,\ x,\ a) = s\left[(1 + \beta(t))t + \frac{x}{c}\cos(b(t)) + \tau_0 \right], \tag{61}$$

где $1 + \beta(t) = \alpha(t)$ – случайный доплеровский параметр;

τ_0 – детерминированная задержка сигнала.

Положим, что условия, налагаемые на шумовой фон и на вид стохастических уравнений, моделирующих случайный угол прихода и доплеровский параметр, те же самые, что и в предыдущем примере. Тогда для случайных параметров управляющие уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_b \\ f_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_b & 0 \\ 0 & B_\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_b \\ n_\beta \end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Нетрудно видеть, что общая структура уравнений оценки случайных параметров сигнала не изменится, а изменится лишь значение производных по параметрам:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{b}}{dt} \\ \dfrac{d\hat{\beta}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_b \\ \hat{f}_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{V}_{bb}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial b}\right) + \hat{V}_{b\beta}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial \beta}\right) \\ \hat{V}_{\beta d}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial b}\right) + \hat{V}_{\beta\beta}\sum\limits_i \left(\dfrac{u_i - z_i}{G_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial \beta}\right) \end{pmatrix}. \qquad (63)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial b} = -\frac{x_i}{c}\frac{\partial s_i}{\partial b}\sin(b); \qquad \frac{\partial z_i}{\partial \beta} = t\frac{\partial s_i}{\partial t}. \qquad (64)$$

Аналогичные уравнения можно записать для дисперсий оценки параметров и коэффициентов корреляции.

Таким образом, имея априорные данные о стохастической модели измеряемых параметров, можно построить оптимальный измеритель. Причем необходимо отметить, что полученные измерители являются составной частью блоков фильтрации в общем алгоритме обнаружения сигнала.

Литература

1. Бутырский, Е.Ю. Основные понятия теории систем и сигналов на группах преобразований / Е.Ю. Бутырский // Информация и Космос. – 2007. – №3. – С. 67–80.

2. Кловский, Д.Д. Обработка пространственно-временных сигналов / Д.Д. Кловский, В.А. Сойфер. – М.: Связь, 1976, – 207 с.

3. Красный, Л.Г. Оптимальное различение и обнаружение сигналов как задача нелинейной фильтрации / Л.Г. Красный // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – №3. – С. 163–170.

4. Левин, Б.Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б.Р. Левин, В. Шварц. – М.: Радио и связь, 1985, – 312 с.

5. Левин, Б.Р.. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М.: Сов. радио, Т. 1, – 522с. ; Т. 2. – 504с. ; Т. 3. – 285 с.

6. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978, – 400с.

7.Оливер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Оливер. – М.: Мир, 1989, – 635 с.

8. Перов, А.И. Адаптивная фильтрация сообщения с неизвестными статистическими характеристиками / А.И. Перов // Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1980. – Т. 23. – № 4. – С. 40–45.

9. Первачев, С.В. Дискретный алгоритм скользящего приема / С.В. Первачев, А.И. Перов // Радиотехника и электроника – 1981. – Т. 26. – № 1. – С. 73–79.

10. Розанов, Ю.А. Марковские случайные поля / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1981. – 256 с.

11. Сапрыкин, В.А. Теория обработки гидроакустической информации / В.А. Сапрыкин, С.П. Рокотов. – Петродворец, ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1986. – 308 с.

12. Сосулин, Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. – М.: Сов. радио, 1978. – 320 с.

13. Стратонович, Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления / Р.Л. Стратонович. – М.: МГУ, 1966. – 319 с.

14. Тихонов, В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.

15. Шелухин, О.И. Радиосистемы ближнего действия / О.И. Шелухин. – М., Радио и связь, 1989. – 237 с.

16. Ярлыков, М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике / М.С. Ярлыков. – М.: Сов. радио, 1980. – 358 с.