К определению энтропии функций принадлежности в теории нечётких множеств

To definition of entropy of functions of an accessory in the theory of fuzzy sets

Ключевые слова: объективная и субъективная энтропия – objective and subjective entropy; вероятность – probability; теория нечётких множеств – the theory of fuzzy sets; функция распределения – distribution function; функция принадлежности – accessory function.

Предложен способ определения «субъективной энтропии» для функций принадлежности, получаемых экспертами и используемых в теории нечётких множеств. Наряду с «объективной энтропией» она может использоваться при оценивании свойств человеко-машинных (эргатических) систем.

The estimation method is offered to "subjective entropy» on functions of an accessory of the theory of fuzzy sets of L. Zade. The method is based on approximation of functions of an accessory by set of functions of distribution of probabilities and the subsequent finding on them entropy of functions of an accessory.

СМАГИН / SMAGIN V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ, почётный профессор
ВКА им. А.Ф. Можайского,
действительный член МАИ.
г. Санкт-Петербург

ПАРАМОНОВ / PARAMONOV I.
Иван Юрьевич
(ivan_paramonov@mail.ru)
кандидат технических наук.
ВКА им. А.Ф. Можайского, докторант.
г. Санкт-Петербург

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория информации, созданная К.Э. Шенноном в конце сороковых годов прошлого века, опиралась на важное фундаментальное понятие «энтропии» [1]. Количественное представление энтропии было тесно связано с классической теорией вероятностей случайных событий и процессов. Теория информации – это научная основа связи и управления в живом организме, машине и обществе. Фундамент теории информации – статистическая неопределённость.

Данная теория информации полностью удовлетворяла инженерные потребности связи и управления в обществе почти в течение 20 лет. Но уже в эти годы ставился вопрос о развитии динамической теории информации [2].

В 1965 вышла фундаментальная статья L.A. Zaden «Fuzzy sets» [3], посвящённая теории нечётких множеств. В отличие от классической теории вероятностей она позволяла построить математический аппарат для описания нечётких чисел, событий, лингвистических переменных и количественных операций над ними. В отличие от «объективных» неопределённостей теории вероятностей она дала исследователям возможность работать с «субъективными» неопределённостями при изучении свойств систем, существенно расширив область количественных системных исследований. Известно [4], что при оценивании интегрального качества сложных систем, состоящих из аппаратных, программных средств и коллективов операторов, их частные показатели должны быть согласованными. Как правило, они должны носить вероятностный характер.

С подобной ситуацией приходится иметь дело и при совместном исследовании информационных систем, состоящих из средств, оцениваемых методами теории «чётких множеств», и средств, оцениваемых методами теории «нечётких множеств». В качестве общего показателя целых систем иногда целесообразен выбор энтропии. Количественно «объективную» энтропию на основе «чётких множеств» теории информации К.Э. Шеннона исследователи умеют определять. А вот методов количественного определения «субъ-

ективной» энтропии, связанной с «нечёткими множествами», на наш взгляд, не существует.

Целью данной статьи является найти один из возможных подходов определения величины «субъективной» энтропии, а именно указать способ расчёта величины энтропии для конкретной функции принадлежности в теории нечётких множеств. При этом здесь не ставится задача предложить в отличие от известного понятия энтропии какое-то новое понятие. Просто надо научиться вычислять шенноновскую энтропию для функций принадлежности теории нечётких множеств, которые на практике строятся коллективами экспертов.

СУЩНОСТЬ ПРОСТЕЙШЕГО ПОДХОДА

Для вычисления величины энтропии в классическом случае нужно знать величину вероятности события. Эта величина может быть найдена из функции распределения случайной величины. Спросим себя, что может быть общего между функцией распределения и функцией принадлежности теории нечётких множеств? Общим является единственное свойство – их максимальное значение всегда равно единице.

Для нахождения некоторой функции принадлежности по некоторой функции распределения рассмотрим элементарную задачу. Пусть плотность вероятности случайной величины является нормальной с параметрами $m = 10$ ед., $\sigma = 3$ ед., то есть $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma \exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$. Зададимся двумя функциями распределения

$$F(x) = \int_0^x f(z)dz, \quad G(x) = \int_0^{x+c} f(z)dz,$$

где c – некоторая константа сдвига. Найдём величину энтропии для произвольного значения аргумента x, пользуясь разностью приведённых функций $D(x) = G(x) - F(x)$.

Величина энтропии будет равна:

$$H(x) = -[D(x)\ln(D(x)) + (1 - D(x))\ln(1 - D(x))]. \quad (1)$$

Предположим, что $c = 5$ ед. Тогда, некоторая функция $R(x) = 1{,}667D(x)$ для данного значения с может быть представлена как функция принадлежности $\mu_X(x) = 1{,}667D(x)$. Рис. 1, 2 иллюстрируют этот факт.

Итак, мы рассмотрели «c-дифференциальный переход» от функции распределения к функции принадлежности с равным значением энтропии. Уменьшая константу c, увеличиваем постоянный коэффициент у функции принадлежности. Рассмотренный пример назовём «обратной задачей преобразования». Далее рассмотрим «прямую задачу преобразования».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЭНТРОПИИ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Задачу рассмотрим на частном примере негладкой функции принадлежности.

Пусть задана функция принадлежности следующего вида:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a}(x-a), & a \le x \le \dfrac{a+b}{2}; \\ \dfrac{2}{b-a}(b-x), & \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases} \quad (2)$$

Положим $a = 2$, $b = 7$. Далее для удобства графического представления этой функции примем следующие обозначения:

$$\mu(x) = \frac{2}{b-a}(x-a), \; \nu(z) = \frac{2}{b-a}(b-z). \quad (3)$$

Тогда график функции (2) можно представить в виде рис. 3.

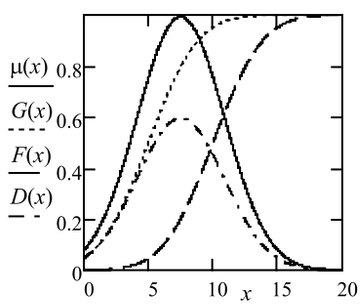

Рис. 1

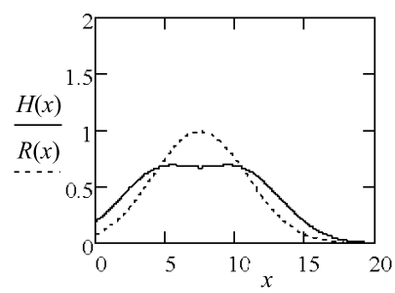

Рис. 2

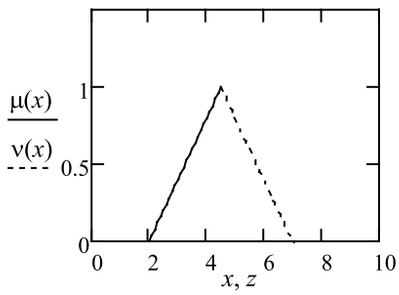

Рис. 3

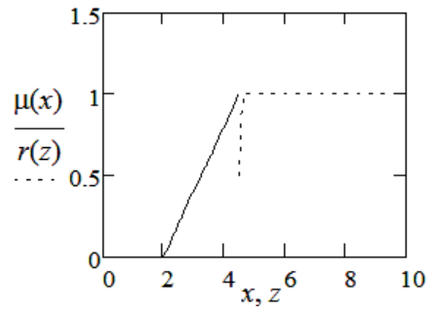

Рис. 4

Прямая задача сводится к тому, чтобы найти величину энтропии для функции принадлежности, изображённой на рис. 3. Для решения задачи представим данную функцию в виде разложения по функциям распределения вероятностей. Так как функция является разрывной, то необходимо при её представлении использовать элементы обобщённых функций. Дельта-функция Дирака представляется в виде

$$\Delta(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – единичная ступенчатая функция. Представим левую часть функции принадлежности и её ступенчатое продолжение следующей функцией распределения

$$\mu(x) = \frac{2}{b-a}(x-a),\ x = a, a+\delta, a+2\delta, \ldots,$$

$$\frac{a+b}{2};\ r(z) = \Phi(z - \frac{a+b}{2}),\ z \geq \frac{a+b}{2}.$$

Данная функция изображена на рисунке 4. Поступая таким же образом, представим правую часть функции принадлежности и её ступенчатое продолжение. Но сначала изобразим симметричное относительно оси абсцисс её положительное изображение:

$$\mu_2(x_2) = \frac{2}{b-a}(x_2 - \frac{a+b}{2}),$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \delta, \ldots, b;$$

$$r_2(z_2) = \Phi(z_2 - b),\ z_2 \geq b.$$

Эта функция изображена на рисунке 5.

Чтобы совершить «дифференциальный переход», в результате которого эти две функции распределения (на рис. 4, 5) сформируют заданную на рис. 3 функцию принадлежности, необходимо из функции распределения на рис. 4 вычесть функцию распределения на рис. 5. В результате вычитания получаем объединённую функцию, показанную на рис. 6.

Складывая положительные и отрицательные ординаты графиков, получаем график заданной функции принадлежности, показанный на рис. 3. Таким образом, аппроксимируя заданную функцию принадлежности совокупностью функций распределения вероятностей, и произведя над ними необходимые объединяющие действия, можем снова получить исходную функцию принадлежности. Но каждая полученная функция распределения представляет собой множество вероятностей, соответствующих множеству её аргументов. Каждой вероятности соответствует определённое значение энтропии. Производя алгебраические действия над вероятностями компонентов, можем получать множество вероятностей на множестве значений аргументов функции принадлежности. А это, в свою очередь, означает возможность получения множества значений энтропий на множестве значений аргументов функции принадлежности.

Вычислим в нашем примере кривую изменения энтропии функции принадлежности в зависимости от значений её аргумента. Пользуясь рис. 6 с его левой частью функции распределения, получим:

$$HL(x) = -\left[\frac{2}{b-a}(x-a)\ln\left(\frac{2}{b-a}(x-a)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{2}{b-a}(x-a)\right)\ln\left(1 - \frac{2}{b-a}(x-a)\right)\right], \quad (4)$$

где x изменяется от a до $\frac{a+b}{2}$.

Вычислим кривую изменения энтропии правой части функции принадлежности, поль-

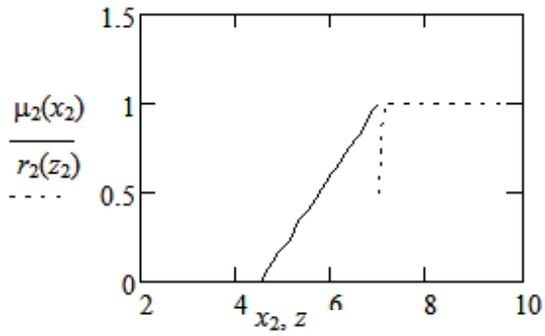

Рис. 5

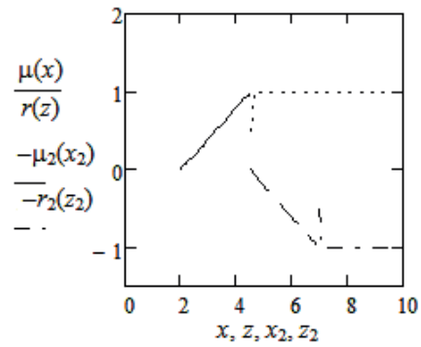

Рис. 6

зуясь вычитанием отрицательного представления второй функции распределения. При этом сумма единичных значений обеих функций распределений за абсциссой b становится равной нулю. Далее получаем:

$$HP(x_2) = -\left[\left(1-\frac{2}{b-a}\left(x_2-\frac{a+b}{2}\right)\right)\ln\left(1-\frac{2}{b-a}\left(x_2-\frac{a+b}{2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{b-a}\left(x_2-\frac{a+b}{2}\right)\ln\left(\frac{2}{b-a}\left(x_2-\frac{a+b}{2}\right)\right)\right], \quad (5)$$

где x_2 изменяется от $\frac{a+b}{2}$ до b. Вычисления выражений (4) и (5) проводились в среде Mathcad 14 с точностью 0,1. Результирующая зависимость энтропии функции принадлежности от значений её аргумента приведена на рис. 7.

Примеры определения величины энтропии для других, более сложных форм функций принадлежности могут быть выполнены заинтересованным читателем, чтобы отвергнуть или принять предлагаемый здесь метод.

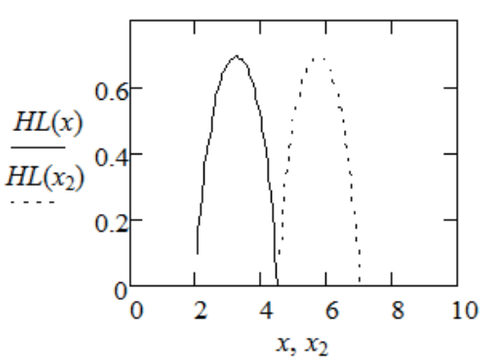

Рис. 7

Интуитивно можно утверждать лишь о том, что графики величины энтропии будут находиться и соответствовать только тем участкам функций принадлежности, наклон которых будет отличаться от строго вертикальных и горизонтальных линий на них.

Примечание. При введении аппроксимации функции принадлежности следует иметь ввиду тот факт, что размерность по осям абсцисс как функции принадлежности, так и функций распределения одинакова и эта размерность определяется значимостью мнения эксперта. Значимость мнения увеличивается слева направо и, теоретически, для непрерывной функции распределения может достигать бесконечного значения.

Рассмотрим второй пример определения энтропии для более сложной функции принадлежности. Пусть требуется дать количественную оценку истинности экспертного заключения о риске поражения объекта. Введём лингвистическую переменную g – «риск поражения объекта». Универсальным множеством для переменной g является отрезок [0,1], а множеством значений переменной g – терм-множество $G = \{G_1, G_2, G_3\}$, где

– G_1 = «высокий риск поражения»;
– G_2 = «средний риск поражения»;
– G_3 = «низкий риск поражения».

Каждый терм из множества G является именем нечёткого подмножества на отрезке [0,1]. Будем рассматривать эти нечёткие подмножества как трапециевидные нечёткие числа, показанные на рис. 8.

Составим таблицу функций принадлежности каждого терма, используя формулу функции принадлежности трапезоидного нечёткого числа $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$:

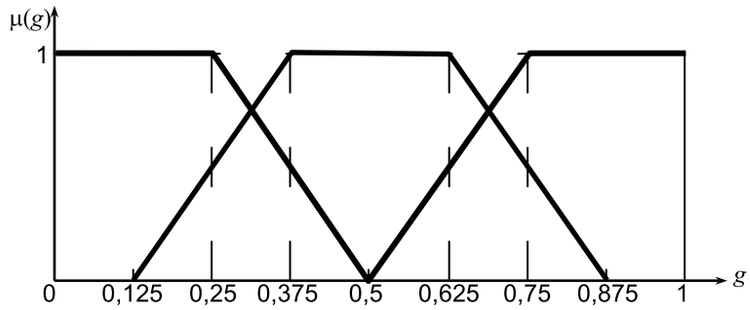

Рис. 8

$$\mu(x)=\begin{cases}0, & x<a_1;\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1\le x<a_2;\\ 1, & a_1\le x<a_2;\\ \dfrac{x-a_4}{a_3-a_4}, & a_3<x\le a_4;\\ 0, & x>a_4.\end{cases} \qquad (6)$$

Укрупним представленные термы, сведя их количество до двух:

– G_{32} = «риск поражения не выше среднего»;

– G_{21} = «риск поражения не ниже среднего».

Далее, поступая как в примере 1, последовательно, найдём функции энтропий, сначала для термов G_1, G_2, G_3, а затем объединим полученные функции энтропий для термов G_{32}, G_{21}. Результаты этих объединений представлены на рис. 9–11.

Пусть величина риска принимает значение $g = 0{,}7$. Тогда согласно табл. 1 получаем следующие значения функций принадлежности для среднего и высокого рисков:

$$\mu_2 = 4\times(0{,}875-0{,}7) = 0{,}7;$$

$$\mu_1 = 1-4\times(0{,}75-0{,}7) = 0{,}8.$$

Что касается величины энтропии, то согласно рис. 11, она принимает максимальное значение $H_{21} = 1{,}111$ нит. при $g = g_{21} = 0{,}7$. Нетрудно заме-

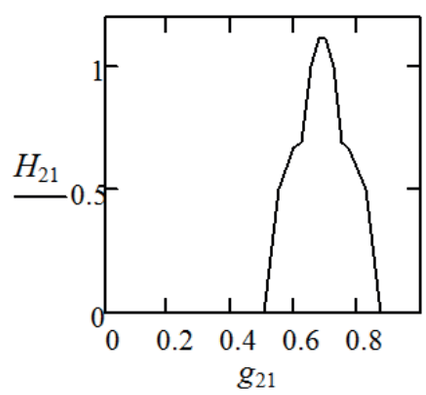

Рис. 10

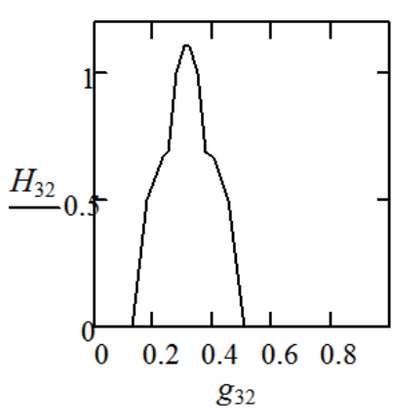

Рис. 9

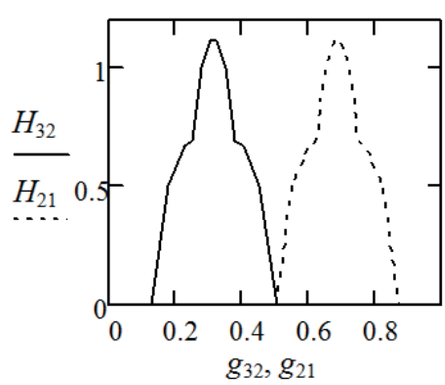

Рис. 11

Таблица 1

Функции принадлежности подмножеств терм-множеств g

Терм G_k	Функция принадлежности нечёткого множества G_k
G_3 = «низкий риск поражения»	$\mu_3 = \begin{cases} 1, & 0 \le g \le 0{,}25 \\ 4(0{,}5 - g) & 0{,}25 < g \le 0{,}5 \end{cases}$
G_2 = «средний риск поражения»	$\mu_2 = \begin{cases} 1 - 4(0{,}375 - g) & 0{,}125 < g \le 0{,}375 \\ 1, & 0{,}375 < g \le 0{,}625 \\ 4(0{,}875 - g) & 0{,}625 < g \le 0{,}875 \end{cases}$
G_1 = «высокий риск поражения»	$\mu_1 = \begin{cases} 1 - 4(0{,}75 - g), & 0{,}5 < g < 0{,}75 \\ 1, & 0{,}75 \le g \le 1 \end{cases}$

Таблица 2

Характеристики показателей качества сложных систем

Номер	1 подсистема	2 подсистема	Объединённая система
Показатель качества	Вероятностный	Вероятностный	Вероятностный
	Лингвистический	Лингвистический	Лингвистический
	Информационный	Информационный	Информационный
	Вероятностный	Лингвистический	?
	Вероятностный	Информационный	?
	Лингвистический	Информационный	?

тить, что это значение превышает максимальное значение парциальной величины энтропии, равной 0,693, которое достигается на пологих склонах любого из приведенных трёх термов. Таким образом, наложение функций принадлежности подмножеств терм-множеств приводит к увеличению энтропии.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

Поставим задачу оценивания качества системы, составленной из подсистем, характеризуемых различными количественными показателями. На примерах системы из двух подсистем можно представить табл. 2.

Так как в сложной системе, включающей в свой состав аппаратные, программные средства и живых операторов, целевой критерий и показатель качества должен быть согласован, необходимо иметь модели эквивалентного преобразования одних показателей в другие. Это позволит объективно определять количественные значения показателей систем, а также решать задачу распределения предусмотренных ресурсов для систем с целью оптимизации или достижения предъявленных к ним требованиям.

Указанные задачи требуют выполнения дальнейших исследований, которые будут обеспечивать достижение требуемой эффективности функционирования сложных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено утверждение о том, что при оценивании величины энтропии для сложных систем необходимо различать и учитывать «объективную энтропию» для неживых компонентов систем и «субъективную энтропию» для живых компонентов систем. При оценивании и сложении их можно пользоваться энтропией К.Э. Шеннона.

Предложена эвристическая модель определения величины «субъективной энтропии». Она заключается в том, что сначала функция принадлежности представляется (аппроксимируется) суммой функций распределения вероятностей, а затем для каждой функции распределения находится значимый участок, для которого и определяется зависимость величины энтропии от соответствующего диапазона значений его аргумента.

Приведены примеры численного определения величины энтропии треугольной симметричной функции принадлежности и функции принадлежности подмножеств терм-множеств.

Поставлена задача оценивания и обеспечения качества систем, состоящих из компонентов, обладающих разнородными показателями качества.

Литература

1. *Тарасенко, Ф.П.* Введение в курс теории информации. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1963. – 240 с.
2. *Чернавский, Д.С.* Синергетика и информация. – М.: Знание. – 1990. – 27 с.
3. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and control 8. – 1965. – P. 338–353.
4. *Смагин, В.А.* Основы теории надёжности программного обеспечения. / В.А. Смагин, А.И. Дорохов – СПб., Балтийский гос. техн. ун-т, 2009. – 304 с.