Оптимальное планирование информационного взаимодействия космического аппарата с дискретной средой на поверхности Земли

Optimum planning of information interaction of a spacecraft with a discrete medium on surface of the Earth

Калинин / Kalinin V.
Владимир Николаевич
(kvn.112@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники России,
действительный член Российской академии
космонавтики им. К. Э. Циолковского,
член-корреспондент Международной академии
информатизации,
ФГКВОУ ВПО «Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
профессор кафедры.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: космическая кибернетика – space cybernetics; космический аппарат – spacecraft; информационное взаимодействие – information interaction; информационный активный подвижный объект – information active movable object; среда информационного взаимодействия – information interaction environment; дискретная среда – discrete medium; пространство информационных состояний – space of information statuses; бортовой ресурс – onboard resource; оптимальное терминальное управление – optimum terminal control.

В статье рассматривается ряд задач космической кибернетики, связанных с оптимальным терминальным управлением процессами информационного взаимодействия космического аппарата с заданным дискретным множеством точек на поверхности Земли. Космический аппарат при этом интерпретируется как информационный активный подвижный объект, т.е. как сложная подвижная система, снабженная необходимыми приборами для осуществления информационного взаимодействия с окружающей физической средой и соответствующим бортовым ресурсом. Показано, что указанные задачи сводятся к задачам оптимального программного управления некоторой конечномерной дифференциальной динамической системой. Для их решения в статье используется принцип максимума Л. С. Понтрягина.

A number of problems of space cybernetics is considered in the article, connected with optimum terminal control of information interaction processes of a spacecraft with the set discrete set of points on Earth surface. The spacecraft is thus interpreted as an information active movable object, i.e. as a complex mobile system supplied with necessary devices for information interactive with the surrounding physical medium and the appropriate onboard resource. It is shown that the specified tasks are reduced to problems of optimum program control by a finite-dimensional differential dynamic system. The maximum principle of L. S. Pontryagin is used for their solution in the article.

1. Введение

В современной космической кибернетике [1, 2] важнейшее место занимает исследование проблемы оптимального управления космическим аппаратом (далее сокращенно КА). Рассмотрение целевых и системных аспектов функционирования КА приводит к целесообразности интерпретации его как информационного активного подвижного объекта [2], предназначенного для осуществления информационного взаимодействия с окружающей физической средой. Соответствующее концептуальное и математическое описание КА приведено в работах [1, 3, 4, 5], где рассмотрены математические модели КА как объекта управления, реализующего указанное информационное взаимодействие.

В настоящей статье на основе этих математических моделей рассматриваются некоторые детерминированные задачи оптимального управления информационным взаимодействием космического аппарата с дискретным множеством точек на поверхности Земли. Под информационным взаимодействием здесь подразумевается сбор информации о состоянии объектов на земной поверхности. Для постановки соответствующих задач уточним исходные допущения, лежащие в основе используемых моделей и общей характеристики рассматриваемых процессов информационного взаимодействия. А именно, примем следующие предположения.

a) КА совершает неуправляемый орбитальный полет в центральном гравитационном поле Земли при отсутствии возмущений.

b) Информационное взаимодействие с поверхностью Земли осуществляется с помощью одного прибора.

c) Множество информационного взаимодействия представляет собой конечное множество заданных точек на поверхности Земли.

d) На борту КА имеется один ограниченный непополняемый ресурс, расходуемый в процессе информационного взаимодействия.

e) Запаздыванием информационных сигналов вследствие конечной скорости их распространения можно пренебречь.

Для дальнейшего рассмотрения соответствующих задач управления уточним необходимые математические элементы их постановки и, прежде всего, математическую модель соответствующих процессов информационного взаимодействия.

2. Основные элементы постановки задач

Выделим следующие три элемента постановки рассматриваемых задач.

2.1. Математическая модель информационного взаимодействия КА с дискретной средой на поверхности Земли. Будем рассматривать исследуемые процессы информационного взаимодействия на некотором заданном интервале времени

$$\sigma = [t_0, t_f] \subset [0, \infty), \ t_f > t_0, \tag{1}$$

где t_0 – начальный, t_f – конечный моменты времени.

При указанных выше допущениях центр масс КА в соответствии с законами Кеплера будет совершать плоское свободное движение по эллиптической орбите, один из фокусов которой совпадает с центром Земли. Будем считать это движение заданным и представленным кинематической моделью вида

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in \sigma, \tag{2}$$

в которой $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс КА, а $\vec{r}(\cdot)$ – соответствующее заданное инъективное отображение: $\sigma \to R^3$ (рис. 1).

Будем рассматривать этот радиус-вектор в относительной экваториальной геоцентрической декартовой системе координат. При этом центр масс КА, которому на рис. 1 соответствует точка A, перемещается из некоторого начального положения A_0 в конечное A_f. На рис. 1 показана область информационного взаимодействия A', а также трасса полета КА (геометрическое место подспутниковых точек A' пересечения радиус-вектора центра масс КА с поверхностью Земли) и ее отрезок $A'_0 A'_f$, который отвечает рассматриваемому интервалу времени.

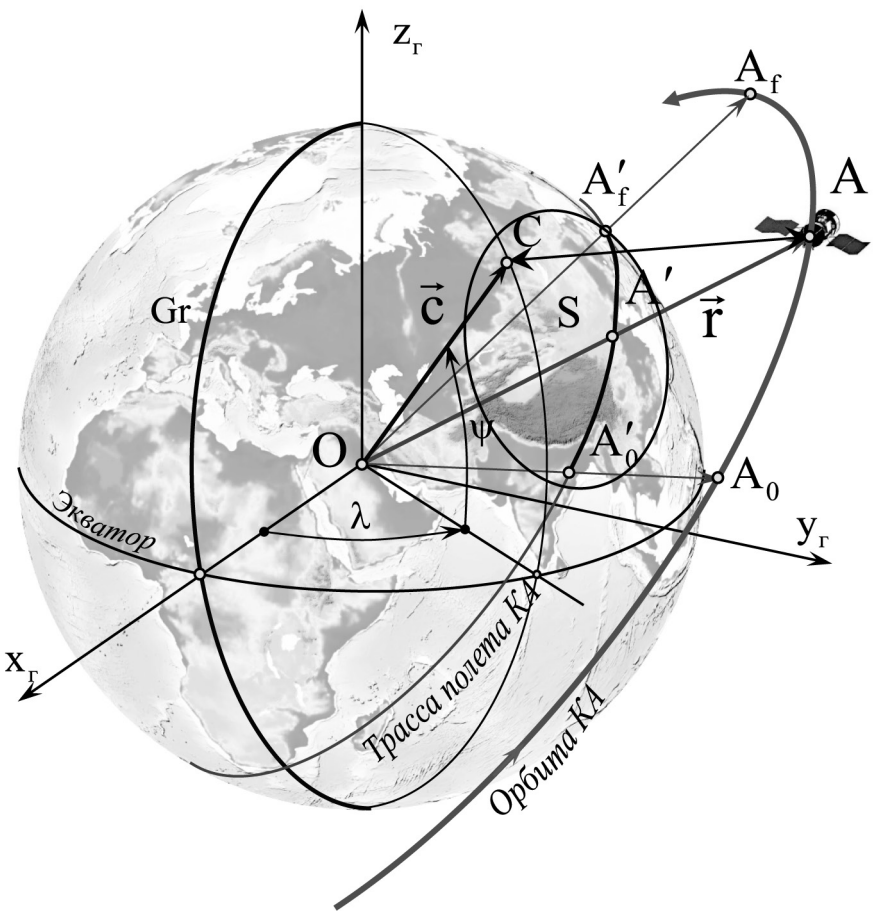

Рис. 1. Информационное взаимодействие КА с поверхностью Земли

В работе [4] показано, что если множество информационного взаимодействия S является континуальным, а именно представляет собой некоторую ограниченную замкнутую область на поверхности Земли, то состояние информационного взаимодействия КА с этой областью в любой момент времени может быть математически представлено как некоторое распределение плотности информации (полученной от точек указанной области к моменту времени t) по множеству S, заданное уравнением:

$$\gamma(\vec{\rho},t)=\int_{t_0}^{t} M(\vec{\rho},\tau)u(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $\vec{\rho}=\|\lambda\ \psi\|^{\mathrm{T}}$ – вектор географических координат точек области S (долгота и широта), $M(\vec{\rho},\tau)$ – заданная функция, $u=u(t)$ – интенсивность (скорость) информационного взаимодействия, рассматриваемая в дальнейшем как соответствующее управляющее воздействие. С математической точки зрения правая часть уравнения (3) представляет собой линейный интегральный оператор Фредгольма с ядром $M(\rho,\tau)$ и со значениями в некотором гильбертовом функциональном пространстве. Конкретный вид этого ядра определяется движением центра масс КА (2), ориентацией корпуса КА, ориентацией прибора относительно корпуса и диаграммой направленности информационного взаимодействия. В дальнейшем будем полагать, что ядро оператора $M(\vec{\rho},\tau)$ задано и является ограниченным и кусочно-непрерывным в области своего определения.

В настоящей статье рассматривается одна из более простых моделей информационного взаимодействия [5], в которой предполагается, что множество информационного взаимодействия S на поверхности Земли не континуально, а дискретно, т.е. образовано конечной совокупностью точек виде $Q=\{\vec{a}_i\}$, где $\vec{a}_i,\ i=1,\ldots,n$ – заданные векторы, принимающие значения из прямоугольника $[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$. В этом случае указанная модель приобретает следующий более простой вид:

$$\gamma(\vec{a}_i,t)=\int_{t_0}^{t} M(\vec{a}_i,\tau)u(\tau)d\tau,\ i=1,\ldots,n, \tag{4}$$

так что текущее информационное состояние здесь характеризуется не функцией координат, а конечным набором n вещественных чисел. Это означает, что пространство информационных состояний X при этом оказывается не функциональным, а конечномерным ($X=R^n$), что приводит к значительному упрощению модели (вследствие перехода к конечномерной топологии) и позволяет применить для дальнейшего исследования хорошо разработанные методы теории конечномерных дифференциальных динамических систем.

Рассмотрим соответствующие конечномерные уравнения более подробно. Начальное информационное состояние будем считать нулевым, а требуемое финальное информационное состояние (краевые условия на правом конце траектории в пространстве состояний) зададим в виде:

$$\gamma(\vec{a}_i,t_f)=z_{3i},\ i=1,\ldots,n, \tag{5}$$

где $\vec{a}_i$ – заданные точки множества Q, а z_{3i} – заданные положительные числа.

Введем обозначения:

$$z_i=\gamma(\vec{a}_i,t),\ i=1,\ldots,n \tag{6}$$

и рассмотрим соответствующие n-мерные вектор-столбцы:

$$\vec{z}=\|z_1\ z_2\ \ldots\ z_n\|^{\mathrm{T}},\ \vec{z}_3=\|z_{31}\ z_{31}\ \ldots\ z_{3n}\|^{\mathrm{T}}\in X=R^n. \tag{7}$$

В этом случае уравнения состояния информационного взаимодействия (4) приобретают следующий вид:

– в интегральной форме:

$$\vec{z}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{b}(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{8}$$

– в дифференциальной форме:

$$\dot{\vec{z}}=\vec{b}(t)u,\ \ \vec{z}(t_0)=\vec{0}. \tag{9}$$

Здесь $\vec{b}(t)$ – заданная n-мерная векторная функция:

$$\vec{b}(t)=\|b_1(t)\ b_2(t)\ \ldots\ b_n(t)\|^{\mathrm{T}},\ \mathrm{b_i}(t)=M(\vec{a}_i,t),\ i=1,\ldots n, \tag{10}$$

где $b_i(t)$ – неотрицательные ограниченные кусочно-непрерывные функции, определенные на интервале управления (1).

При этом для полного задания рассматриваемой математической модели уравнения (8) и (9) необходимо дополнить заданием класса допустимых управляющих воздействий (допустимых управлений). А именно, зададим этот класс в виде:

$$U_\sigma=\left\{u_\sigma=u(\cdot):\sigma\to R^1\middle|(\forall\tau\in\sigma)(0\le u\le c);S_u\right\}, \tag{11}$$

где c – заданное положительное число (максимальная интенсивность взаимодействия), S_u – теоретико-функциональные условия, накладываемые на управляющее воздействие и в данном случае трактуемые как измеримость по Лебегу.

Построенную таким образом математическую модель будем называть моделью информационного взаимодействия КА с дискретной средой на поверхности Земли.

2.2. Математическая модель бортового ресурса. Будем предполагать, что на борту космического аппарата имеется один расходуемый ресурс (запас носителя информации, энергии или т. п.), характеризуемый уравнением:

$$\dot{q}=-\alpha u \tag{12}$$

при начальном условии $q(t_0)=q_0>0$. Здесь q – величина ресурса, u – управление взаимодействием, α –

положительная константа, характеризующая скорость расхода ресурса. На конечное состояние ресурса наложим следующее естественное условие:

$$q\left(t_f\right) = q_f \geq 0, \tag{13}$$

которое является краевым условием на правом конце траектории состояния ресурса.

2.3. Показатель качества процесса управления информационным взаимодействием. Показатель качества рассматриваемых процессов управления информационным взаимодействием зададим в виде терминального функционала (функционала Майера)

$$J(u_\sigma) = h\left(\vec{z}\left(t_f\right)\right), \tag{14}$$

в котором $h(\cdot)$ – заданное отображение: $X \to R^1$, характеризующее достигнутое в результате управления финальное информационное состояние. При этом в качестве указанного функционала $h\left(\vec{z}\left(t_f\right)\right)$ будут рассмотрены квадратичные и линейные функционалы, математическое представление которых приводится далее при рассмотрении соответствующих задач.

3. Общая постановка задачи оптимального управления информационным взаимодействием. Некоторые замечания о существовании оптимальных решений и методе их нахождения

Приведем общую формулировку рассматриваемой задачи оптимального управления.

Среди всех допустимых управляющих воздействий найти такое, которое доставляет абсолютный минимум функционалу (14) при выполнении ограничения на оставшийся ресурс (13).

Если такое управляющее воздействие существует, то будем называть его оптимальным и обозначать через $u_\sigma^* = u^*(\bullet)$.

Сделаем некоторые замечания по поводу существования оптимального решения. С этой целью отметим, что, так как элементы вектора $\vec{b}(t)$ суть ограниченные кусочно-непрерывные функции, определенные на σ, то (см., напр., [6, с. 78], соответствующие классу допустимых управлений (11) множества информационной достижимости

$$G(U_\sigma, t_1) = \left\{ \vec{z}(t_1) \middle| \vec{z}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{b}(\tau) u(\tau) d\tau; u(\cdot) \in U_\sigma \right\} \subset R^n \tag{15}$$

являются ограниченными, замкнутыми и выпуклыми и при этом непрерывно расширяются с ростом $t_1 \in \sigma$. Кроме того, из принятых выше предположений относительно модели (9) следует, что все множества информационной достижимости расположены в неотрицательном ортанте R_+^n пространства R^n.

Далее, так как речь идет о минимизации квадратичных или линейных терминальных функционалов вида (14), то вследствие их непрерывности и выпуклости нижняя грань этих функционалов в классе допустимых управлений всегда достигается (обобщенная теорема Вейерштрасса), т. е. искомое оптимальное управление заведомо существует (!) и при этом либо единственно, либо принадлежит выпуклому подмножеству класса допустимых управлений.

Для практического нахождения искомых решений в данном случае целесообразно использовать соответствующую модификацию принципа максимума Понтрягина [7] применительно к уравнению состояния (9). В нашем случае применение этой теории облегчается вследствие сравнительно простого вида указанного уравнения, правая часть которых не зависит от состояния и линейна по управлению. При этом оказывается, что применительно к квадратичным (и линейным) терминальным функционалам в данном случае вследствие линейности объекта управления принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности, т. е. позволяет решить задачу до конца. Эти выводы справедливы и с учетом ограниченности ресурса вследствие линейности ресурсной модели (12). Перейдем к рассмотрению соответствующих конкретных задач, основанных на принятых выше условиях и допущениях.

4. Некоторые задачи оптимального планирования информационного взаимодействия КА с дискретной средой

Рассмотрим вначале две задачи оптимального планирования в том идеальный случае, когда бортовой ресурс является неограниченным.

4.1. Задача оптимального управления – математическая модель информационного взаимодействия с дискретной средой, квадратичный терминальный функционал, неограниченный ресурс. Зададим минимизируемый терминальный функционал в следующем виде (начальное состояние информационного взаимодействия предполагается нулевым):

$$J\left(u_\sigma\right) = h\left(\vec{z}\left(t_f\right)\right) = 0{,}5\left\|\vec{z}\left(t_f\right) - \vec{z}_3\right\|_{R^n}^2 = \\ = 0{,}5\left|\vec{z}\left(t_f\right) - \vec{z}_3\right|^2, \tag{16}$$

где $\vec{z}_3$ – заданный положительный вектор в R^n и отражающий желательный конечный эффект информационного взаимодействия. Данный функционал является разновидностью функционала Лагранжа–Майера и представляет собой количественную меру отклонения финального распределения собранной информации от заданного. Будем называть управляющее воздействие оптимальным, если функционал (16), характеризующий "расстояние" между конечным и заданным информационными состояниями, достигает минимального значения.

Из принципа максимума [7, 8] следует, что если в рассматриваемой задаче оптимальное управление $u^*\left(t\right)$ существует (а это так!), то оно удовлетворяет условию

$$H\left(\vec{\psi}_0,t,u^*(t)\right)=\max_{0\le u\le c}H\left(\vec{\psi}_0,t,u\right), \tag{17}$$

где

$$H\left(\vec{\psi}_0,t,u\right)=\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}_0 u \tag{18}$$

– функция Понтрягина [7], в которой $\vec{\psi}_0$ – сопряженный вектор, удовлетворяющий следующему условию трансверсальности [6,8]:

$$\vec{\psi}_0=-\mathrm{grad}h\left(\vec{z}^*\left(t_f\right)\right)=\vec{z}_3-\int_{t_0}^{t_f}\vec{b}\left(t\right)u^*\left(t\right)dt, \tag{19}$$

где u^* – оптимальное управление, $z^*(t_f)$ – соответствующее ему оптимальное конечное состояние.

Предположим, что для оптимального управления выполняется условие:

$$\mathrm{mes}\left\{t\,|\,\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}_0=0\right\}=0, \tag{20}$$

которое будем называть условием регулярности, и найдем управляющее воздействие, максимизирующее функцию (18) при некотором отличном от нуля векторе $\vec{\psi}$, – экстремаль Понтрягина:

$$u'(t,\psi)=\arg\max_{0\le u\le c}\left[\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}u\right]=\begin{cases}c, \text{ если } \vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}u>0,\\ 0, \text{ если } \vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}u\le 0,\end{cases} \tag{21}$$

которую удобно представить в виде:

$$u'\left(t,\vec{\psi}\right)=c\chi_-\left(\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}\right), \tag{22}$$

где использована одна из так называемая функций “включения” (функций Хевисайда), определяемых соотношениями:

$$\chi_-\left(z\right)=\begin{cases}1 \text{ при } z>0\\ 0 \text{ при } z\le 0\end{cases};\ \chi_+\left(z\right)=\begin{cases}1 \text{ при } z\ge 0\\ 0 \text{ при } z<0\end{cases}. \tag{23}$$

Таким образом, исходя из (19), для определения оптимального управления необходимо решить следующее алгебраическое уравнение относительно сопряженного постоянного вектора $\vec{\psi}$:

$$\vec{\psi}=\vec{z}_3-c\int_{t_0}^{t_f}\vec{b}\left(t\right)\chi_-\left(\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}\right)dt. \tag{24}$$

Можно показать, что если краевая задача решения не имеет, то сопряженный вектор отличен от нуля и уравнение (24) имеет единственное решение $\vec{\psi}_0$, которое и позволит получить искомое оптимальное управление в виде

$$u_1^*\left(t\right)=u'\left(t,\vec{\psi}_0\right)=c\,\chi_-\left(\vec{\psi}_0^{\mathrm{T}}\vec{b}(t)\right). \tag{25}$$

Заметим, что, подставляя (24) в (22) и тем самым исключая из рассмотрения сопряженный вектор, можно получить следующее нелинейное интегральное уравнение относительно управляющего воздействия (интегральное уравнение Бутковского [9])

$$u\left(t\right)=c\chi_-\left(\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\left(\vec{z}_3-c\int_{t_0}^{t_f}\vec{b}\left(\tau\right)u(\tau)d\tau\right)\right), \tag{26}$$

решение которого также определит оптимальное управление (25).

4.2. Задача оптимального управления – математическая модель информационного взаимодействия с дискретной средой, линейный терминальный функционал, неограниченный ресурс. В этой задаче в качестве минимизируемого функционала рассмотрим линейный терминальный функционал

$$J\left(u_\sigma\right)=h\left(\vec{z}\left(t_f\right)\right)=\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\,\vec{z}\left(t_f\right), \tag{27}$$

где

$$\vec{\xi}=\left\|\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_n\right\|^{\mathrm{T}},\ \xi_i>0,\ i=1,2,\ldots, \tag{28}$$

– положительный вектор, составляющие которого представляют собой коэффициенты относительной важности (ценности) информации, получаемой от отдельных дискретных источников на поверхности Земли. Будем считать рассматриваемый процесс управления оптимальным, если функционал (27) достигает своего максимального значения.

Из принципа максимума следует, что если в данном случае оптимальное управление существует, то оно доставляет максимум соответствующей функции Понтрягина, которая определяется теми же выражениями (17–18), (25). Вместе с тем, в данном случае уравнение для сопряженного вектора $\vec{\psi}_0$, в соответствии с условием трансверсальности, имеет исключительно простой вид, а именно,

$$\vec{\psi}_0=\vec{\xi}\,. \tag{29}$$

Отсюда следует, что искомое оптимальное управление определяется выражением

$$u_2^*\left(t\right)=c\chi_-\left(\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{b}(t)\right). \tag{30}$$

Перейдем теперь к рассмотрению аналогичных задач оптимального терминального управления с учетом ограничения на величину бортового ресурса.

4.3. Задача оптимального управления – математическая модель информационного взаимодействия с дискретной средой, квадратичный терминальный функционал, ограниченный ресурс. Рассмотрим задачу квадратичной оптимизации п. 4.2 при ограниченном бортовом ресурсе, который характеризуется уравнением (12) с

начальным условием $q(t_0) = q_0 > 0$. На конечное состояние ресурса наложено ограничение (13). Вследствие линейности дополнительного уравнения (12) можно установить, что решение этой задачи существует, и если в указанных условиях краевая задача (т.е. задача точного перевода системы в заданное конечное состояние) неразрешима, то это решение является единственным.

Из принципа максимума следует, что если в рассматриваемой задаче оптимальное управление $u^*(t)$ существует, то оно удовлетворяет условию

$$H\left(\vec{\psi}_0, t, u^*(t)\right) = \max_{0 \le u \le c} H\left(\vec{\psi}_0, t, u\right), \tag{31}$$

где

$$H\left(\vec{\psi}_0, t, u\right) = \left[\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}_0 - p_0\alpha\right]u \tag{32}$$

– функция Понтрягина, в которой $\vec{\psi}_0$ – сопряженный вектор, p_0 – дополнительная сопряженная величина, которая в данном случае представляет собой неотрицательную константу. При этом вектор $\vec{\psi}_0$ и константа p_0 для оптимального управления удовлетворяют следующим условиям трансверсальности:

$$\vec{\psi}_0 = -\mathrm{grad}h\left(\vec{z}^*\left(t_f\right)\right) =$$
$$= \vec{z}_3 - \int_{t_0}^{t_f} \vec{b}(t)u^*(t)dt,\ p_0\left(q_0 - \alpha\int_{t_0}^{t_f} u^*(\tau)d\tau\right) = 0, \tag{33}$$

где u^* – оптимальное управление, $z^*(t_f)$ – соответствующее ему оптимальное конечное состояние.

Предполагая, что условие регулярности для данной задачи:

$$\mathrm{mes}\left\{t \mid \vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi}_0 - p_0\alpha = 0\right\} = 0 \tag{34}$$

выполнено, представим экстремаль Понтрягина, максимизирующую функцию (32) при некоторых произвольных значениях $\vec{\psi}$ и p, в следующем виде:

$$u'\left(t, \vec{\psi}, p\right) = \arg\max_{0 \le u \le c}\left\{\left[\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi} - p\alpha\right]u\right\} = c\chi_-\left[\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\psi} - p\alpha\right]. \tag{35}$$

Требуемые сопряженные величины $\vec{\psi}_0$, p_0 при этом определятся как решения алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\psi} &= \vec{z}_3 - c\int_{t_0}^{t_f} \vec{b}(t)u'\left(t, \vec{\psi}, p\right)dt\ , \\ p\left(q_0 - \alpha\int_{t_0}^{t_f} u'\left(t, \vec{\psi}, p\right)dt\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

в которые следует подставить выражение (35). В результате получим оптимальное управление в виде:

$$u_3^*(t) = u'\left(t, \vec{\psi}_0, p_0\right). \tag{37}$$

Как уже указывалось ранее, возможен другой путь нахождения оптимального управления – исключение из рассмотрения сопряженного вектора $\vec{\psi}$. С этой целью подставим первое из уравнений (36) в (35) и придем к выражению:

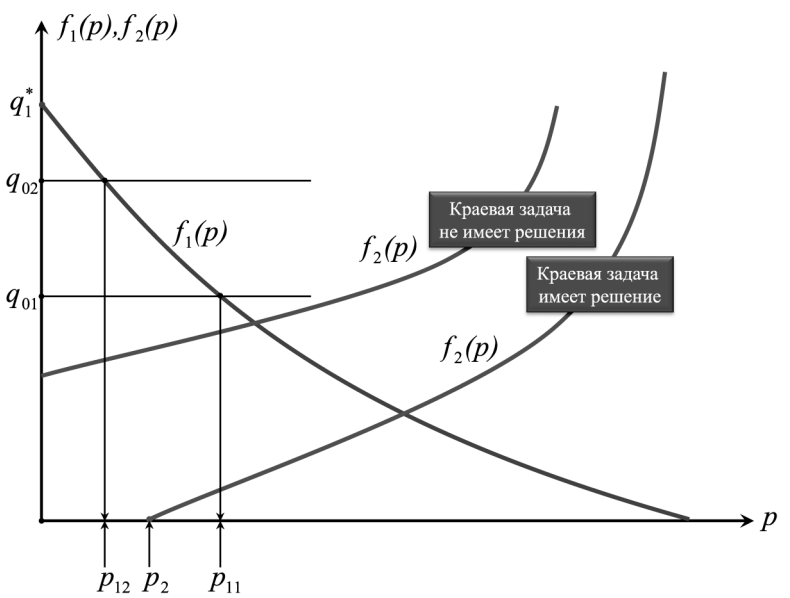

Рис. 2. Графики функций $f_1(p)$ и $f_2(p)$

$$u(t) = c\chi_-\left(\vec{b}^{\mathrm{T}}(t)\left(\vec{z}_3 - \int_{t_0}^{t_f}\vec{b}(\tau)u(\tau)d\tau\right) - p\alpha\right), \quad (38)$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно искомого оптимального управления, зависящее от неотрицательного скалярного параметра p.

Для определения требуемого значения указанного параметра проведем анализ решений полученных выше уравнений. Предположим, что решение уравнений (35–36) (или, что то же самое, уравнения (38)) при любом неотрицательном значении параметра p найдено и может быть представлено некоторой функцией $u = w(t, \mathrm{p})$. Рассмотрим две скалярные функции от параметра $p \geq 0$: функцию

$$f_1(p) = \alpha\int_{t_0}^{t_f} w(t,p)dt, \quad (39)$$

которая характеризует расход бортового ресурса при данном значении этого параметра, и функцию

$$f_2(p) == 0{,}5\left|\vec{z}(t_f) - \vec{z}_3\right|^2 = 0{,}5\left|\int_{t_0}^{t_f}\vec{b}(t)w(t,p)dt - \vec{z}_3\right|^2, \quad (40)$$

которая характеризует отклонение достигнутого информационного состояния от заданного конечного. На рис. 2 представлены примерные графики указанных функций.

Будем предполагать, что выполнено условие

$$q_0 < q_1^* = \alpha\int_{t_0}^{t_f} u_1^*(t)dt, \quad (41)$$

так как в противном случае ограничения на ресурс можно не учитывать.

Анализ приведенных графиков позволяет сделать вывод о том, что в общем случае искомое значение параметра p может быть найдено по формуле:

$$p_0 = \max\left\{p_1, \max\arg\min_{p\geq 0} f_2(p)\right\}, \quad (42)$$

где p_1 – решение алгебраического уравнения

$$f_1(p) = q_0, \quad (43)$$

в котором q_0 – заданное начальное значение бортового ресурса.

При этом искомое оптимальное управление можно представить в следующем виде:

$$u_3^*(t) = w(t, p_0). \quad (44)$$

При этом параметр p может служить важным индикатором существования решения соответствующей краевой задачи, а именно:

– если $f_2(0) > 0$, то решения краевой задачи не существует;

– если существует такое наибольшее не равное нулю значение $p = p_2$,что $f_2(p_2) = 0$, то решение краевой задачи существует и имеет вид:

$$u_{\text{кр}}(t) = w(t, p_2). \quad (45)$$

Это означает, что в данном случае система информационного взаимодействия (9) реально управляема относительно заданного состояния $\vec{z}_3$. Отметим также, что частным случаем полученного решения является решение задачи п. 4.1, а именно

$$u_1^*(t) = w(t, 0). \quad (46)$$

4.4. Задача оптимального управления – математическая модель информационного взаимодействия с дискретной средой, линейный терминальный функционал, ограниченный ресурс. Вернемся к задаче п. 4.2 с учетом ограниченного ресурса (12–13). Для нахождения соответствующего оптимального управления воспользуемся принципом максимума, применение которого в данном случае упрощается, так как, как уже указывалось в п. 4.5.3, в данном случае сопряженный вектор $\vec{\psi}_0$ определяется в явном виде формулой (29).

Экстремаль Понтрягина в данном случае приобретает вид:

$$u'(t,\vec{\xi},p) = \arg\max_{0\leq u\leq c}\left\{\left[\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{b}(t) - p\alpha\right]u\right\} = c\chi_-\left[\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{b}(t) - p\alpha\right], \quad (47)$$

где p – дополнительная сопряженная неотрицательная величина.

Искомое оптимальное управление в этом случае

$$u_4^*(t) = u'(t,\vec{\xi},p_0) = c\chi_-\left[\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{b}(t) - p_0\alpha\right], \quad (48)$$

где константа p_0 определяется как решение алгебраического уравнения

$$\alpha\int_{t_0}^{t_f} u'(t,\vec{\xi},p)dt = q_0. \quad (49)$$

При этом, как и в п. 4.5.4, предполагается, что

$$q_0 < q_2^* = \alpha\int_{t_0}^{t_f} u_2^*(t)dt. \quad (50)$$

5. Заключение

Проектирование и создание космических аппаратов для сбора информации о состоянии окружающей физической среды (и, прежде всего, о состоянии объектов на поверхности Земли) представляет собой исключительно трудную инженерно-техническую проблему. Это связано со сложными условиями их функционирования и высокой стоимостью выведения на требуемую орбиту. При этом особую актуальность приобретает обеспечение высокой эффективности целевого функционирования подобных орбитальных средств и в связи с этим разработка соответствующих оптимальных алгоритмов управления целевой бортовой аппаратурой с учетом ограниченности расходуемых при этом бортовых ресурсов. В настоящей статье рассмотрены некоторые из подобных задач космической кибернетики. Показано, что в рамках принятой модели информационного взаимодействия с дискретной средой на поверхности Земли эти задачи сводятся к задачам оптимального терминального программного управления конечномерной линейной дифференциальной динамической системой. Для решения указанных задач в статье использован принцип максимума Л. С. Понтрягина. Предложенные алгоритмы управления могут быть использованы в практической космонавтике в качестве эталонных решений при совершенствовании существующих и при разработке перспективных космических аппаратов, предназначенных для информационного взаимодействия с окружающей физической средой.

Литература

1. Калинин, В. Н. Современная космическая кибернетика – методологические основы и направления исследований / В.Н. Калинин // Информация и Космос. – 2007. – № 3. – С. 7–16.

2. Калинин, В. Н. О теории управления активными подвижными объектами / В.Н. Калинин // Известия вузов. Приборостроение. – 1981. – № 6. – С. 26–31.

3. Калинин, В. Н. Космический аппарат как объект системных исследований / В.Н. Калинин // Труды Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2014. – Вып. 640. – С. 80–89.

4. Калинин, В. Н. Математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли / В.Н. Калинин // Труды СПИИРАН. – 2014. – Вып. 3 (34). – С. 33–56.

5. Калинин, В. Н. Морфологический анализ проблематики математического моделирования процессов информационного взаимодействия космического аппарата с окружающей физической средой / В.Н. Калинин // Информация и Космос. – 2014.– № 1. – С. 94–104.

6. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972. – 574 с.

7. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1969. – 391 с.

8. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Наука и техника, 1974. – 272 с.

9. Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.