Фильтрация и обнаружение сигналов в условиях параметрической неопределенности

Filtering and detection of signals in conditions of parametrical uncertainty

Бутырский / Butyrsky E.
Евгений Юрьевич
(evgenira88@mail.ru)
доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный работник высшей школы РФ.
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
профессор кафедры теории управления.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: функция – function; аппроксимация – approximation; динамическая система – dynamic system; сигнал – signal; процесс – process; алгоритм – algorithm; матрица – matrix; фильтрация – filtering.

В статье рассмотрен вопрос оптимальной обработки сигналов в условиях, когда фильтруемый процесс известен с точностью до вектора постоянных параметров. Показано, что решение задачи фильтрации и обнаружения может быть получено путем использования процедур адаптации.

The question of optimum signal processing in conditions when the filtered process is known to within the vector of constant parameters is considered in the article. It is shown that solution of the filtering and detection problem may be received by using adaptation procedures.

Введение

Результаты фильтрации являются корректными при условии, что фильтруемый процесс описывается в пространстве состояний с точностью до вектора постоянных параметров. При таком подходе структура фильтруемого процесса играет определяющую роль при синтезе алгоритма фильтрации. Решение задачи фильтрации и обнаружения в этом случае может быть получено путем использования процедур адаптации. Как правило, в адаптивную систему фильтрации входит блок фильтрации, формирующий оценку процесса, и контур адаптации, формирующий оценку неизвестных параметров. Т.е. при таком подходе решение задачи оптимальной фильтрации включает в себя и идентификацию модели фильтруемого процесса.

Постановка задачи фильтрации и обнаружения в условиях параметрической неопределенности

Пусть задана система обнаружения с блоком фильтрации, который можно охарактеризовать вектором параметров **a**. Необходимо решить задачу адаптации заданной системы фильтрации к процессу, подлежащему оцениванию. При этом не будем конкретизировать математическое описание процесса на входе системы обработки. Данная постановка задачи имеет определенную связь с классической постановкой задачи синтеза адаптивной системы фильтрации при заданной модели фильтруемого процесса [1] и хорошо соответствует практическим нуждам, так как на практике одна и та же система фильтрации используется для решения различных задач. И в этом случае задача адаптации решается как адаптация заданной системы обработки для фильтрации и обнаружения различных процессов.

Как правило, в адаптивную систему фильтрации входит блок фильтрации, формирующий оценку процесса, и контур адаптации, формирующий оценку неизвестных параметров. Т.е. при таком подходе решение задачи оптимальной фильтрации включает в себя и идентификацию модели фильтруемого процесса.

Положим, что имеет место система обнаружения с блоком фильтрации, который можно охарактеризовать вектором параметров **a**, числовые значения которого неизвестны. Положим, что система является линейной нестационарной с M входами и N выходами. В пространстве состояний система фильтрации, обеспечивающая работу системы обнаружения, может быть представлена дифференциальным уравнением [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t,\mathbf{a})\mathbf{x} + \mathbf{K}(t,\mathbf{a})[\mathbf{u} - \theta\mathbf{S}(t) - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{1}$$

где: $\mathbf{x}$ – вектор состояния системы фильтрации при гипотезе наличия (θ=1, $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_1$) и отсутствия сигнала (θ=0, $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_0$) соответственно, размерность $N \times 1$;

$\mathbf{S}(t)$ – вектор сигнала размерностью $M \times 1$;

$\mathbf{F}(t,\mathbf{a})$ – матрица размером $N \times N$;

$\mathbf{K}(t,\mathbf{a})$ – матрица размером $N \times M$;

$\mathbf{H}(t,\mathbf{a})$ – матрица размером $M \times N$.

Параметр θ=0,1. Введем функцию $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{n}(t) - \theta\mathbf{S}(t)$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t,\mathbf{a}) + \mathbf{K}(t,\mathbf{a})[\mathbf{u}_1 - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}]. \tag{2}$$

Будем считать, что на M входов системы (1), (2) поступает вектор реализаций $\mathbf{u}$, содержащих сигнал, помеху и шум (уравнение (1)) или помеху и шум (уравнение (2)). Шумы полагаем белыми. Таким образом, можно записать:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{S} + \mathbf{H_1}\lambda + \mathbf{n} \\ \mathbf{u} = \mathbf{H_1}\lambda + \mathbf{n} \end{cases}, \tag{3}$$

где: $\mathbf{n}(t)$ – вектор нормальных белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей

$$< \mathbf{n}(t)\mathbf{n}^{\mathrm{T}}(t+\tau) >= \mathbf{R}(t)\delta(\tau) >; \tag{4}$$

$\mathbf{H_1} = \left\{h_{i(t)}\right\}$ – диагональная матрица размером $M \times M$; $\lambda(t) = \left\{\lambda_i(t)\right\}$ вектор фильтруемого процесса.

Из соотношений (1) и (2) и размерности процесса $\mathbf{u}(t)$ следует, что вектор $\mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}$ имеет размерность $M \times 1$. Вводя соответствующую индексацию вектора состояния $\mathbf{x}$, и учитывая (3), получаем, что матрица $\mathbf{H}(t,\mathbf{a})$ может быть представлена блочной матрицей следующего вида:

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{a}) = \left|\mathbf{H_0}(t,\mathbf{a}) \quad \mathbf{0}\right|, \tag{5}$$

где: $\mathbf{H}_0(t,\mathbf{a}) = \left\{h_{0i}(t,\mathbf{a})\right\}$ – диагональная матрица размером $M \times M$.

Рассматриваемая система фильтрации характеризуется вектором постоянных параметров $\mathbf{a}$ размерностью $k \times 1$, регулировкой которых необходимо минимизировать следующий показатель качества:

$$\begin{cases} J_1(\mathbf{a}) = \int (\mathbf{u} - \mathbf{s} - \mathbf{H}\mathbf{x}_1)^{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{s} - \mathbf{H}\mathbf{x}_1)dt \\ J_2(\mathbf{a}) = \int (\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0)^{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0)dt \end{cases}. \tag{6}$$

В подъинтегральные выражения (6) входит нелинейная квадратичная функция от случайных процессов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$, которые определяются через белый шум $\mathbf{n}(t)$. Соотношения (6) будем понимать в смысле интеграла Ито. Математическое ожидание функционалов (6) может быть записано в следующем виде:

$$< J(\mathbf{a}) >=< J_\mathbf{0}(\mathbf{a}) >=< J_1(\mathbf{a}) >= \int sp[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{E}]dt, \tag{7}$$

где: $sp[.]$ – след матрицы,

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{a}) =< \left[\mathbf{H_1}(t) - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right]\left[\mathbf{H_1}(t) - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right]^{\mathrm{T}} >. \tag{8}$$

В частном случае, при известной матрице $\mathbf{H_1}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{H}_0(t,\mathbf{a})$, выражение (7) принимает вид:

$$< J(\mathbf{a}) >= \int sp[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H_1}\mathbf{E_1}\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}]dt,$$
$$\mathbf{E_1} =< (\lambda - \hat{\lambda})(\lambda - \hat{\lambda})^{\mathrm{T}} >, \quad \hat{\lambda}_i = x_i \tag{9}$$

Таким образом, минимизация математического ожидания функционала $J(\mathbf{a})$ эквивалентна минимизации дисперсии ошибки воспроизведения сообщения $\lambda(t)$. В общем случае можно ввести вектора:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H_1}\lambda = \{h_i\lambda_i\}, \tag{10}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \{h_{0i}x_i\}. \tag{11}$$

Получение математической модели оптимального фильтра

Поставленную задачу минимизации функционала проведем при ограничении $\mathbf{a}$=*const*. Применим для нахождения условного экстремума принцип максимума Понтрягина, для чего введем вспомогательную функцию (функция Гамильтона) [1,3]:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{u}_1 - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{R}^{-1}(t)\left[\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right] + \mathbf{b}, \tag{12}$$

где: $\mathbf{b}$ – неопределенные множители (сопряженный вектор).

Дифференциальные уравнения для сопряженных векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, в рассматриваемом случае, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} = \dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{b}} = 0, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a_0} \\ \dfrac{d\mathbf{b}}{dt} = -\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{a}} = \dfrac{\partial(\mathbf{Ha})^{\mathbf{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{u_1} - \mathbf{Hx}], \quad \mathbf{b}(t_k) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

с условиями на краях интервала $\left[0,t_k\right]$; $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}(t_k) = 0$.

Из (13) следует, что минимизация функционала $J(\mathbf{a})$ сведена к двухточечной краевой задаче, решение которой можно провести методом погружения [1, 2]. Для этого «погружаем» нулевое граничное условие (13) в более общее $\mathbf{b}(t_k) = \mathbf{c}$, в которое входит нулевое граничное условие как частный случай. При ненулевом граничном условии краевая задача (13) изменяется и может быть записана в обобщенном виде следующим образом:

$$\mathbf{a}(t_k) = \mathbf{r}(\mathbf{c},t_k), \tag{14}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{r},t_k),\quad \frac{d\mathbf{b}}{dt}=\mathbf{g}(\mathbf{r},t_k).$$

В работе [1] показано, что $\mathbf{r}(\mathbf{c},t_k)$ удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{dt}+\left(\frac{\partial\mathbf{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{g}=\mathbf{f}. \tag{15}$$

Уравнение (15) не решается в общем виде. Но так как нас интересует решение в окрестности точки $\mathbf{c}=0$, разложим $\mathbf{r}(\mathbf{c},t_k)$ в ряд и ограничимся линейными членами:

$$\mathbf{r}(\mathbf{c},t)=\hat{\mathbf{a}}(t)-\mathbf{P}(t_k)\mathbf{c},\quad \mathbf{r}(0,t_k)=\hat{\mathbf{a}}(t_k). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), выполняя дифференцирование и заменяя t_k на текущее время t, получаем следующее выражение:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{d\mathbf{P}}{dt}\mathbf{c}+\mathbf{P}\mathbf{g}+\mathbf{f}. \tag{17}$$

Используя методику, изложенную в [1], получаем соотношения:

$$\mathbf{g}=\frac{\partial(\mathbf{H}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}_1-\mathbf{H}\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{18}$$

где:

$$\mathbf{A}=\frac{\partial(\mathbf{H}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1},\quad \mathbf{y}=\mathbf{u}-\mathbf{H}\mathbf{x}.$$

разлагая которые в ряд в окрестности точки $\mathbf{c}=0$ и ограничиваясь в разложении для $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ нулевым членом разложения, а для $\mathbf{y}(t,\mathbf{r})$ – нулевым и первым членом разложения, получаем формулы для оценки неизвестных параметров системы фильтрации [1,2]:

$$\frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt}=\mathbf{P}\frac{\partial[\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}})]^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{u}_1-\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}})], \tag{19}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=-\mathbf{P}\frac{\partial[\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}})]^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1}\frac{\partial[\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}})]^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{P}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial[\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}})]^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}=\frac{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{a}})\frac{\partial\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{a}}.$$

Уравнения (19) и (20) описывают закон управления параметрами $\mathbf{a}$, или другими словами, закон формирования оценок параметров $\mathbf{a}$. Сформированные оценки вводятся в основной блок фильтрации, описываемый соотношением (1).

В уравнения (20) и (19) входит производная $\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{a})/\partial\mathbf{a}$, выражение для которой можно получить путем дифференцирования по а выражения (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\right)=\frac{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}-\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{a}}+\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{a}}\right)+(\mathbf{u}_1-\mathbf{H})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{a}}. \tag{21}$$

Соотношения (21) описывают линейный фильтр, на входы которого поступают векторные компоненты вектора $\mathbf{x}$ и разностный процесс $\left[\mathbf{u}-\mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right]$ из основного блока фильтрации (1).

Из приведенных соотношений (19–21) следует, что структура контура адаптации определяется только структурой основного блока фильтрации (1) и выбранным набором регулируемых параметров $\mathbf{a}$ и не зависит от структуры процесса, подлежащего фильтрации. Однако статистические характеристики контура адаптации зависят и определяются взаимной корреляцией процесса $\left[\mathbf{u}-\mathbf{H}(t,\mathbf{a})\mathbf{x}\right]$, а производная фазовых координат системы фильтрации – регулируемым параметром $\mathbf{a}$. При изменении характеристик фильтруемого процесса меняются статистические характеристики указанных процессов и их взаимная корреляция, а следовательно, изменяется процесс адаптации в контуре. Таким образом, синтезированная адаптивная система фильтрации инвариантна относительно входной модели фильтруемого процесса и является оптимальной при заданных условиях. В случаях если математическая модель входного процесса задана, то предлагаемый адаптивный алгоритм фильтрации совпадает с известными алгоритмами классического синтеза систем фильтрации. Положим, что структура фильтруемого процесса известна и определяется уравнением:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\mathbf{F}\lambda+\mathbf{G}\mathbf{n}_1. \tag{22}$$

где: $\mathbf{n}_1(t)$ – вектор нормальных белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей

$$<\mathbf{n}_1(t)\mathbf{n}_1^{\mathrm{T}}(t+\tau)>=\mathbf{Q}(t)\delta(\tau).$$

Наблюдаемый, на входе системы фильтрации, процесс описывается следующим соотношением:

$$\mathbf{u}_1(t)=\theta\mathbf{S}(t)+\mathbf{H}_1(t,\mathbf{a})\lambda+\mathbf{n}(t). \tag{23}$$

В соотношениях (22) и (23) вектор $\mathbf{a}$ описывает неизвестные статистические характеристики фильтруемого процесса. Если в уравнении (1) положить:

$$\begin{cases}\mathbf{K}=\mathbf{E}_1\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\\ \dfrac{\mathbf{dE}_1}{dt}=\mathbf{F}\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_1\mathbf{F}^{\mathrm{T}}+\mathbf{G}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}-\mathbf{E}_1\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}_1\end{cases}, \tag{24}$$

то данное уравнение описывает фильтр Калмана для модели фильтруемого процесса (21) и модели наблюдения (22).

Таким образом, полученный алгоритм адаптивной фильтрации не противоречит известным алгоритмам и позволяет решать ряд дополнительных задач.

Во-первых, возможно решение задачи линейных систем фильтрации заданной структуры без учета типа фильтруемого процесса.

Во-вторых, при таком алгоритме допускается достаточно широкая вариация регулируемых параметров. Следует отметить, что в качестве регулируемых параметров системы можно выбирать не только естественные параметры, такие как коэффициенты усиления, постоянные времени и т.д., но и различные монотонные функции от этих параметров.

Выбор набора регулируемых параметров в задачах адаптивной фильтрации является важным моментом, который в значительной мере определяет сложность синтезируемой системы. Дело в том, что с точки зрения теории фильтрации, адаптация сводится к формированию оценок неизвестных параметров. Как правило, фильтруемый процесс и его параметры связаны нелинейно. Это неизбежно приводит к тому, что совместное апостериорное распределение процесса и его параметров является негауссовским. Если в этом случае можно было бы сформировать строго оптимальную оценку фильтруемого процесса и его параметров в каждый момент времени, то выбор набора параметров, к которым приводим адаптацию, был бы безразличен. В любом случае мы получили бы минимум дисперсии ошибки фильтрации. Однако при негауссовском характере апостериорного распределения строгое решение в общем случае получить довольно сложно, поэтому используются различные приближения. И здесь существенную роль играет характер нелинейной взаимосвязи фильтруемого процесса и выбранного набора оцениваемых параметров. Используемые приближенные решения могут давать различные качественные и количественные результаты для различных типов указанной нелинейной взаимосвязи. Поэтому при решении практических задач выбор набора оцениваемых параметров может играть существенную роль.

Уравнение (21) формирования оценок параметров **a** можно рассматривать как уравнение, описывающее работу контура адаптации, на выходе которого формируются оценки указанных параметров. Процесс на выходе контура адаптации имеет регулярную и стохастическую составляющие. Регулярная составляющая описывает установление оценок параметров **a** средним. Из соотношения (21) следует, что контур адаптации состоит из нелинейного блока – дискриминатора, блока переменных коэффициентов усиления $P(t)$ и интегратора в качестве сглаживающего фильтра.

Анализ сходимости оптимального фильтра

Для анализа сходимости адаптивного алгоритма рассчитаем дискриминационную характеристику путем осреднения уравнения (21). Предварительно учтем, что $P(t)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с другими сомножителями. Действительно, из (20) следует, что $P(t)$ формируется как интеграл от квадрата низкочастотного процесса $\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}/\partial\mathbf{a}$. Принимая во внимание вышеизложенное замечание, запишем:

$$\frac{d<\hat{\mathbf{a}}>}{dt} = P(t) < \frac{\partial[\mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}]^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{a}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{u}_1 - \mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}] >=$$
$$= -\frac{1}{2}P(t) < \frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}\left\{[\mathbf{u} - \mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}]^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{u}_1 - \mathbf{H}(t,\hat{\mathbf{a}})\mathbf{x}]\right\} >=$$
$$= -P(t)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}sp[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{E}(t,\hat{\mathbf{a}})] = P(T)\mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}).$$

где: $\mathbf{E}(t,\hat{\mathbf{a}})$ описывается выражением (8), в котором вместо **a** следует подставить его оценку.

Из чего следует, что уравнение, описывающее дискриминационную характеристику $\mathbf{D}(\mathbf{a})$ контура адаптации, имеет вид:

$$\frac{d<\hat{\mathbf{a}}>}{dt} = P(t)\mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}). \tag{25}$$

Из анализа уравнения (25) следует, что управляющее напряжение в контуре адаптации равно нулю, т.е. дискриминационная характеристика обращается в нуль при тех же значениях оценок параметров **a**, при которых математическое ожидание показателя качества $J(\mathbf{a})$ имеет минимум, т.е. при оптимальных значениях вектора параметров **a**. Учитывая тот факт, что дисперсия ошибки фильтрации **E** в окрестности оптимума является монотонной выпуклой функцией оценочного вектора параметров **a**, получаем:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{a}})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_{\mathrm{opt}}) < 0 \text{ в окрестности } \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{opt}}. \tag{26}$$

Это означает, что точка $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{opt}}$ является устойчивой точкой равновесия, или другими словами, оценка регулируемых параметров сходится к оптимальному значению, при котором дисперсия ошибки фильтрации минимальная.

С учетом того, что $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(t) - \theta\mathbf{S}(t)$, система обнаружения сигналов, должна иметь два контура адаптации: один в блоке фильтрации, который фильтрует помеху при наличии сигнала, а второй контур адаптации в блоке фильтрации помехи при отсутствии сигнала. Предположим, n-мерный марковский процесс $\mathbf{x}(t)$, $t \in [0,T]$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{a}) + \mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{a})\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{27}$$

Наблюдению доступен k-мерный случайный процесс $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_k(t)\}$, подчиняющийся уравнению вида:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{n}_2, \qquad \xi(0) = 0. \tag{28}$$

Здесь: $\mathbf{n}_1(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$ – l-мерные и p-мерные независимые гауссовские процессы с независимыми компонентами, которые не зависят от начальных условий $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$;

$\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{a})$, $\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{a})$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы, имеющие размерность $n\times 1$, $n\times l$, $k\times n$, $k\times p$ соответственно;

$\mathbf{a}$ – m-мерный вектор неизвестных постоянных параметров:

$$d\mathbf{a}=0,\quad \mathbf{a}(0)=\mathbf{a}_0. \tag{29}$$

Включим неизвестные параметры в число фильтруемых и рассмотрим совместную апостериорную плотность вероятности $W(\mathbf{x},\mathbf{a})$. Плотность вероятности удовлетворяет следующему СДУ [1,2]:

$$dw(\mathbf{x},\mathbf{a})=L_tW(\mathbf{x},\mathbf{a})dt+\Big[\mathbf{F}(\mathbf{x})-\\ -\iint\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x},\mathbf{a})d\mathbf{x}d\mathbf{a}\Big]W(\mathbf{x},\mathbf{a}), \tag{30}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\left(d\xi-\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{x}dt\right); \tag{31}$$

L_t – априорный оператор ФПК для процесса $\{\mathbf{x}(t),\mathbf{a}\}$.

Рассмотрим условную апостериорную плотность вероятности $W(\mathbf{x}|\mathbf{a})$. Для условной плотности вероятности можно записать уравнение, аналогичное (30):

$$dw(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a})=L_{tu}W(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a})dt+\Big[\mathbf{F}(\mathbf{x})-\\ -\iint\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a})d\mathbf{x}d\mathbf{a}\Big]W(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a}), \tag{32}$$

где: $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ по-прежнему описывается уравнением (31), а L_{ty} – многомерный априорный оператор Фоккера-Планка-Колмогорова для процесса $\mathbf{x}(t,\mathbf{a})$ при фиксированном $\mathbf{a}$. Так как в уравнении (29) в правой части стоит ноль, то операторы L_t и L_{tu} оказываются тождественными: $L_t=L_{tu}$.

Выражая совместную плотность вероятности $W(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ через априорную плотность распределения параметров $W(\mathbf{a})$ и условную $W(\mathbf{x}|\mathbf{a})$, находим уравнение для плотности вероятности $W(\mathbf{a})$:

$$dW(\mathbf{a})=\Big[\int\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a})d\mathbf{x}-\iint\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x},\mathbf{a})d\mathbf{x}d\mathbf{a}\Big]W(\mathbf{a}), \tag{33}$$

Аппроксимировав $W(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ гауссовой функцией и выполнив интегрирование, можно получить выражение для $W(\mathbf{a})$:

$$dW(\mathbf{a})=\mathbf{W}(\mathbf{a})\Big[\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\left(d\xi-\frac{1}{2}\mathbf{A}\hat{x}dt\right)-\\ -\frac{1}{2}sp\{\mathbf{P}(\mathbf{a})\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\}dt-\mathbf{T}\Big], \tag{34}$$

$$\mathbf{T}=\iint\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x},\mathbf{a})d\mathbf{x}d\mathbf{a},\quad \hat{\mathbf{x}}=\int\mathbf{F}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{a})d\mathbf{x}.$$

Обозначим:

$$f(\mathbf{a})=\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\left(d\xi-\frac{1}{2}\mathbf{A}\hat{x}dt\right)-\frac{1}{2}sp\{\mathbf{P}(\mathbf{a})\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\}dt, \tag{35}$$

$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{a})$ – матрица дисперсий ошибок оценок $\mathbf{x}(t)$.

Аппроксимируем $W(\mathbf{a})$ гауссовой кривой и разложим $f(\mathbf{a})$ в ряд Тейлора в окрестности точки оценки. В результате, после преобразований (при подстановке в (34) с учетом (35)), получаем оценку вектора неизвестных параметров и дисперсию этой оценки:

$$d\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(d\xi-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}dt)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}sp[\mathbf{P}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}dt\right], \tag{36}$$

$$d\mathbf{E}=\mathbf{E}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(d\xi-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}dt)-\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}}dt-\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}sp[\mathbf{P}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}dt\end{aligned}\right\}\mathbf{E}. \tag{37}$$

Уравнения (36) и (37) описывают блок оценок параметров $\mathbf{a}$.

Уравнения, описывающие неадаптивный блок, т.е. уравнения для оценок вектора $\mathbf{x}$ и матрицы дисперсий $\mathbf{P}^{-1}$, получаются подстановкой выражения для условной плотности вероятности $W(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ (представленную гауссовой кривой) в (32) и приведены в [5]. Уравнения для производных:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}}\right)^{\mathrm{T}},\quad \frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{a}},\quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial a_k},\quad \frac{\partial^2P_{ij}}{\partial a_k\partial a_m}$$

получаются дифференцированием по $\mathbf{a}$ соответствующих уравнений для оценок $\mathbf{x}$ и дисперсий $\mathbf{P}^{-1}$.

Задача фильтрации двумерного Марковского процесса

Рассмотрим задачу фильтрации двумерного марковского процесса $x(t)$, описываемого СДУ вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}+a\sqrt{\frac{N_1}{2}}n_1(t). \tag{37}$$

Последнее выражение можно представить также в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{W},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0\\-a&a\sqrt{\dfrac{N_1}{2}}\end{pmatrix},\quad \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\n_1\end{pmatrix},$$

где: $x=x_1$, $\dfrac{dx_1}{dt}=x_2$, $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$.

Наблюдается реализация, которая описывается уравнением:

$$\xi(t)=x_x(t)+\sqrt{\frac{N_0}{2}}n_0(t),\qquad \xi(0)=0. \tag{38}$$

Уравнения адаптивного фильтра можно получить так же, как и в предыдущей задаче. Таким образом, уравнения адаптивного фильтра имеют вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 + \dfrac{2\sigma_{11}^2}{N_0}(\xi - \hat{x}_1) \\
\dfrac{d\hat{x}_2}{dt} = -\hat{a}\hat{x}_2 + \dfrac{2\sigma_{12}^2}{N_0}(\xi - \hat{x}_1) \\
\dfrac{d\sigma_{11}^2}{dt} = 2\sigma_{12}^2 - \dfrac{2}{N_0}\sigma_{11}^4 \\
\dfrac{d\sigma_{12}^2}{dt} = \sigma_{22}^2 - \hat{a}\sigma_{12}^2 - \dfrac{2}{N_0}\sigma_{11}^2\sigma_{12}^2 \\
\dfrac{d\sigma_{22}^2}{dt} = -2\sigma_{22}^2 - \dfrac{2}{N_0}\sigma_{12}^4 + \dfrac{\hat{a}^2 N_1}{2} \\
\dfrac{\partial\hat{a}}{\partial t} = \dfrac{2\sigma_a^2}{N_0}\dfrac{\partial\hat{x}_1}{\partial a}(\xi - \hat{x}_1) - \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{N_0}\dfrac{\partial\sigma_{11}^2}{\partial a} \\
\dfrac{\partial\sigma^2}{\partial t} = -\dfrac{2\sigma_a^2}{N_0}\left(\dfrac{\partial\hat{x}_1}{\partial a}\right) \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\hat{x}_1}{\partial a}\right) = \dfrac{\partial\hat{x}_2}{\partial a} + \dfrac{2}{N_0}\left[\dfrac{\partial\sigma_{11}^2}{\partial a}(\xi - \hat{x}_1) - \sigma_{11}^2\dfrac{\partial\hat{x}_1}{\partial a}\right] \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\hat{x}_2}{\partial a}\right) = -\hat{x}_2 - a\dfrac{\partial\hat{x}_2}{\partial a} + \dfrac{2}{N_0}\left[\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a}(\xi - \hat{x}_1) - \sigma_{12}^2\dfrac{\partial\hat{x}_1}{\partial a}\right] \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\sigma_{11}^2}{\partial a}\right) = 2\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a} - \dfrac{4\sigma_{11}^2}{N_0}\dfrac{\partial\sigma_{11}^2}{\partial a} \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a}\right) = -\dfrac{\partial\sigma_{22}^2}{\partial a} - \sigma_{12}^2 - \hat{a}\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a} - \dfrac{2}{N_0}\left(\sigma_{11}^2\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a} + \sigma_{12}^2\dfrac{\partial\sigma_{11}^2}{\partial a}\right) \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\sigma_{22}^2}{\partial a}\right) = 2\hat{a}\left(-\dfrac{\partial\sigma_{22}^2}{\partial a} + \dfrac{N_1}{2}\right) - 2\left(\sigma_{22}^2 + \dfrac{4}{N_0}\sigma_{12}^2\dfrac{\partial\sigma_{12}^2}{\partial a}\right)
\end{cases}
$$

где: $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_a^2 -$ дисперсии ошибок фильтрации.

Таким образом, полученный алгоритм адаптивной фильтрации соответствует негауссовой аппроксимации совместной плотности вероятности распределения марковской помехи и неизвестных параметров, так как при его выводе учитывалась зависимость дисперсии ошибки фильтрации марковской помехи от неизвестных параметров.

Литература

1. Перов, А. И. Адаптивная фильтрация сообщений с неизвестными статистическими характеристиками / А.И. Перов // Радиоэлектроника. – 1980. – Т. 23. – № 4. – С. 40–45.

2. Первачев, С. В. Дискретный алгоритм скользящего адаптивного приема / С.В. Первачев, А.И. Перов // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 1. – С. 73–79.

3. Казаков, И. Е. Методы оптимизации стохастических систем / И.Е. Казаков, Д.И. Гладков. – М.: Наука, 1987. – 303 с.

4. Тихонов, В. И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.

5. Толстой, И. Акустика океана / И. Толстой, К. Клей. – М.: Мир, 1969. – 298 с.