Оптимальное вероятностное квантование информации в пространстве с гарантированным ограничением зон влияния объёмных квантов

Optimal probabilistic quantization of information in space with guaranteed limitation of impact zones for volumetric quanta

Смагин / Smagin V.
Владимир Александрович
(va_smagin@mail.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ, почётный профессор
ВКА им. А.Ф. Можайского,
действительный член МАИ.
г. Санкт-Петербург

Парамонов / Paramonov I.
Иван Юрьевич
(ivan_paramonov@mail.ru)
кандидат технических наук.
ФГКВОУ ВПО «Военно-космическая академия
имени А.Ф. Можайского» МО РФ
(ВКА им. А.Ф. Можайского), докторант.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: объёмное пространство – volumetric space; оптимальное квантование – optimal quantization; зона влияния кванта – quantum impact zone; распределение вероятностей – probability distribution; гарантированная вероятность – guaranteed probability; параметр влияния – impact parameter; оценивание количества информации – assessing the amount of information.

Предложено представление объёмного детерминированного или случайного пространства совокупностью равных объёмных квантов. Вероятность представления квантованного пространства достигает максимального значения при известном распределении зоны влияния кванта, значениях его граничной гарантированной вероятности и параметра влияния. Введена модель оценивания количества информации в квантуемом пространстве.

A model is proposed of optimal 3D probabilistic quantization of deterministic or random volumetric space by a set of identical quanta, which maximizes the probability of presenting the quantified space. The size of that optimum quantum is determined by the distribution of its impact zone, its limiting values of guaranteed probability and the impact parameter. A model is introduced for estimating the amount of information or any other value in the quantified space.

Введение

Первые основополагающие результаты решения класса задач оптимального квантования случайной величины были получены в [1, 2]. В статье [1] решена задача теории ценности информации с учётом стоимости. Оптимизируемая функция представлена в виде математического ожидания величины потерь:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty [x(E(z/x)+1) - z]dF(z) + cJ + const,$$

$$J = \int_0^\infty E(z/x)dF(z).$$

Первое слагаемое – средние потери за счёт искажения значения величины z в результате квантования, второе слагаемое – потери за счёт использования неполного количества информации J.

Авторы [2], цитируя [1], минимизируемую функцию квантуемой величины представляют в виде:

$$\Psi(x) = (x+c)\int_0^\infty (E(z/x)+1)dF(z),$$

где x, c – величина кванта и величина промежутка между квантами, $E(\alpha)$ – целая часть числа α, $F(z)$ – функция распределения квантуемой случайной величины $\hat{Z}$, имеющей конечное математическое ожидание.

Отличительными преимуществами [2] по сравнению с [1] является то, что авторы предложили простую физическую иллюстрацию и разработали строгий алгоритм целочисленного решения задачи.

В статье [3] использована идея работы [2] для оценивания вероятности успешной передачи квантованной информации в условиях противодействия противной стороны. Выражение для вероятности успешного сообщения полного количества квантованной информации в неискажённом виде, передаваемой квантами длительности t с разделяющими их паузами длины c, равно:

$$R(t) = \int_0^\infty \left[\frac{\int_0^\infty \overline{B}(t+u)dA(u)}{\int_0^\infty \overline{B}(u)dA(u)} \cdot \overline{P}(c) \right]^{E(\frac{z}{t+c})+1} dF(z).$$

В этой формуле $B(t)$ – функция распределения длительности кванта информации, передаваемого первой стороной. $A(t)$ – функция распределения длительности кванта информации, искажаемой второй стороной в процессе передачи кванта информации первой стороной.

$F(z)$ – функция распределения полного количества передаваемой информации. $\overline{P}(c)$ – вероятность успешной реализации паузы длиной c между квантами. $\overline{B}(t)$ – вероятность того, что длительность кванта информации будет не меньше t.

Максимальное значение $R(t)$ и соответствующая величина кванта находятся численно. В заключении статьи приведен пример игровой ситуации и выбора стратегий противоборствующих сторон.

В статье [4] авторами рассматривались простые задачи квантования синтаксической и семантической информации.

В предлагаемой статье решается задача квантования информации в трёхмерном пространстве. Вводится вероятностная целевая функция для покрытия квантуемого пространства и отыскивается её максимальное значение. Это позволяет максимизировать ожидаемый целевой эффект по сбору необходимой информации в квантуемой области пространства.

Более детально, в трёхмерном информационном пространстве предполагается размещение одинаковых центров сбора информации. Каждый центр обладает объёмным обзором собираемой им информации. Известна плотность вероятности величины обзора центра. В середине центра сбора плотность имеет максимальное значение, а по мере удаления к его периферии значение плотности монотонно убывает. Закономерность убывания плотности одинакова по трём осям. Плотность вероятности кроме постоянного максимального значения также характеризуется средним квадратическим отклонением, величина которого может изменяться в зависимости от некоторых конструктивных условий. Все центры влияния в пространстве сбора информации располагаются строго горизонтально и вертикально на параллельных линиях, примыкая друг к другу. Зоны влияния центров пересекаются с зонами влияния соседних центров по горизонталям и вертикалям. Величина степени пересечения такова, чтобы между шестью соседними зонами, расположенными вокруг отдельной объёмной зоны, не было не охваченной их влиянием части пространства. Это означает, что каждая граница отдельной зоны влияния соприкасается с двумя соседними зонами других зон влияния по прямой линии. Размах зон влияния по трём осям одинаков. Величина размаха определяется некоторой граничной вероятностью, гарантирующей возможность сбора информации центром в его кубичной области. Эта вероятность зависит от конструктивных технических характеристик центра сбора. Задаваясь значением граничной вероятности центра и изменяя величину параметра его влияния – среднего квадратического отклонения (СКО) – можно найти такую плотность вероятности влияния центра, при которой вероятность сбора информации в ограниченном пространстве достигает максимального значения.

Целью данной статьи является отыскание плотности вероятности влияния центра, числа центров влияния и значений их параметров, при которых достигается максимальное значение вероятности сбора информации в заданном объёмном пространстве.

Обоснование существования максимума вероятности

Предположим, что величина параметра влияния – СКО трёхмерной плотности вероятности – достаточно мала. При этом условии в пространстве необходимо расположить достаточно большое количество центров влияния. Это приведёт к тому, что будут достаточно велики суммарные потери всех центров влияния от неиспользуемых объёмов зон влияния из-за введения у них границ. С другой стороны, потери от неиспользуемых объёмов дополнительно введённых центров влияния для сбора информации на периферии пространства, будут сравнительно небольшими.

Теперь предположим, что величина параметра влияния (СКО) будет достаточно велика. Рассуждая так, как изложено выше, мы приходим к выводу о том, что величина суммарных потерь будет определяться в основном потерями неиспользуемых объёмов влияния дополнительно введённых центров.

Эта противоречивая ситуация в определении суммарных объёмных потерь при сборе информации и является основанием для существования оптимального решения. При нём существует такое число объёмных центров влияния, при котором вероятность охвата определённого по величине пространства будет достигать максимального значения.

Математическая формализация задачи квантования

Предполагаем, что нам известно семейство плотностей вероятностей зон влияния центра $f(x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x$ – параметры влияния, определяющие степень разброса влияния относительно центра по трём его осям. В дальнейшем, с целью простоты изложения задачи, будем полагать, что трёхмерная плотность вероятности представима в виде произведения трёх одинаковых одномерных плотностей с математическими ожиданиями m и средними квадратическими отклонениями σ. Это означает, что одномерные случайные величины независимы и обладают одинаковыми параметрами. Тогда наша формализация сведётся к рассмотрению только одной плотности вероятности $f(x, \sigma)$. Предусмотрим общую граничную вероятность q, определяющую величину объёма зоны центра влияния – кванта. Чем меньше будет величина q, тем больше размер зоны влияния центра, но, с другой стороны, тем меньше степень влияния центра на границе кванта. Квант представляется кубом с ребром $2(m-r)$, где m – математическое ожидание начальной зоны влияния, а r – интервал от начала координат до границы зоны влияния. Иначе его можно называть интервалом, односторонне ограничивающим величину зоны влияния кванта по любой из трёх координат. Значение величины r находится при заданной вероятности q и условии, что шесть соседних

квантов охватывают один квант, у которого внутренние границы плотно примыкают к квантам шести соседних квантов. Формально, значение величины r должно находиться в результате решения уравнения:

$$q = (\int_0^r C_\sigma f(z,\sigma)dz)^3 . \quad (1)$$

Правая часть (1) – это вероятность попадания одномерной случайной величины в одностороннюю ограничительную зону кванта. Для ограничительной зоны по любой одной координате соответственно получаем

$$\int_0^r C_\sigma f(z,\sigma)dz - \sqrt[3]{q} = 0 .$$

В уравнении (1) и его следствии C_σ – константа нормирования плотности вероятности при принятом значении параметра влияния. Тогда вероятность попадания случайной величины в поле кванта находится как:

$$p(r,\sigma) = (\int_r^{2m-r} C_\sigma f(z,\sigma)dz)^3 . \quad (2)$$

Выражение (2) справедливо только при условии, что распределение в поле кванта является шаровым. При необходимости может быть записано выражение и для эллипсоидного распределения.

Далее представим размеры пространства, на котором должен производиться центрами влияния сбор необходимой информации. Для простоты анализа предполагаем, что это прямоугольник со сторонами X, Y, Z, представленными детерминированными величинами. Тогда необходимое число квантов, располагаемых вдоль сторон X, Y, Z, будет соответственно равно:

$$E(\frac{X}{2(m-r)})+1, \quad E(\frac{Y}{2(m-r)})+1, \quad E(\frac{Z}{2(m-r)})+1 , \quad (3)$$

где символ E означает округлённое с недостатком целое число от представленного в скобках числа.

Вероятность покрытия объёма пространства квантами центров сбора информации может быть определена в виде следующего выражения:

$$P_{XYZ}(q,\sigma) = (\int_r^{2m-r} C_\sigma f(z,\sigma)dz)^{3\{E[\frac{X}{2(m-r)}]+1\}\{E[\frac{Y}{2(m-r)}]+1\}\{E[\frac{Z}{2(m-r)}]+1\}} . \quad (4)$$

В том случае, когда величины X, Y, Z являются случайными, вероятность (4) представляется в виде:

$$P_{XYZ}(q,\sigma) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\int_r^{2m-r} C_\sigma f(u,\sigma)du)^{3\{E[\frac{X}{2(m-r)}]+1\}\{E[\frac{Y}{2(m-r)}]+1\}\{E[\frac{Z}{2(m-r)}]+1\}} dF_X(x)dF_Y(y)dF_Z(z) , \quad (5)$$

где $F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)$ – функции распределений размеров сторон объёмного пространства сбора информации.

Выражения (4) и (5) могут быть представлены и в других видах, если области влияния квантов представляют собой не шары, а эллипсоиды. В них, кроме того, могут быть учтены зависимости случайных величин по всем координатным осям.

Пример 1. В качестве одной объектной реализации примера можно представить водоём ограниченного размера, в котором может находиться опасный для пребывания предмет. Требуется определить, сколько центров обнаружения нужно предусмотреть и как их расположить, чтобы с максимальной вероятностью получить сведения о месте его нахождения. Технические характеристики центра известны и могут изменяться в некоторых пределах. Все три одномерные координаты зоны центра влияния описываются плотностью вероятности нормального распределения:

$$f(x,\sigma) = (C_\sigma / \sqrt{2\pi}\sigma)\exp(-(x-m)^2 / 2\sigma^2), \quad (6)$$

$m = 30$ *ед.*, σ – параметр влияния, который может изменяться в некоторых пределах. Примем величину граничной гарантированной вероятности $q = 0{,}00000001$, а пространство сбора информации представим кубом со стороной $X = 100$ *ед.* Требуется найти значения всех параметров квантования при условии, что вероятность сбора информации в указанном кубичном пространстве достигает максимального значения.

Решение задачи. Задаёмся некоторым значением σ из области допустимых значений. Из уравнения (1) находим значение для наименьшей границы r кванта. Определяем значение величины ребра кванта по формуле $2(m-r)$ при условии симметричности кривой плотности вероятности относительно математического ожидания. Находим вероятность попадания случайной величины влияния в поле кванта по формуле

$$p = \left(\int_r^{2m-r} C_\sigma f(z,\sigma)dz\right)^3 .$$

Подставляем полученную вероятность p в выражение (4) и вычисляем значение полученной вероятности $P_{XYZ}(q,\sigma)$.

Поступая подобным образом для других значений σ из диапазона возможных значений, находим значения всего множества вероятностей $P_{XYZ}(q,\sigma)$. Окончательно выбираем из этого множества значений то значение, которое является максимальным. Затем определяем значения всех необходимых параметров, сопутствующих решению задачи оптимизации.

В условиях нашего примера (индекс 0 у символов параметров означает принадлежность значений параметров оптимальному решению) для $q = 0{,}00000001$ получаем число квантов: $n_0 = 8$, вероятность попадания случайной величины в поле кванта $p_0 = 0{,}986$, длина ребра кванта $l = 50{,}04$ *ед.*, $\max P_{XYZ}(q,\sigma) = P_0 = 0{,}893$, $\sigma_0 = 8{,}92 - 8{,}98$ *ед.*, $r_0 = 4{,}98$ *ед.*, $C_0 = 1$.

Проверка правильности решения примера осуществлялась сравнением суммарного объёма, охватываемого n_0 квантами, с заданным объёмом квантования.

Итак, в результате решения задачи получен ответ: необходимо иметь восемь квантов – центров в виде куба, образующих кубическую структуру с двумя квантами в любом её ребре, полностью охватывающую заданный объём наблюдения и обеспечивающий выполнение цели с указанной вероятностью P_0.

Пример 2. В условиях оптимального квантования, рассмотренных в примере 1, предположим, что в объёмном кубичном пространстве $X \times Y \times Z$ с длиной ребер $X = Y = Z = 100$ *ед.* распределён в виде пространственной взвеси некоторый продукт. Количество продукта в координатной сетке объёма определяется выражением:

$$W(x,y,z) = xyz + \left[\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{3} + \frac{(z-4)^2}{4}\right]. \quad (7)$$

Согласно результатам, полученным в примере 1, максимизации квантования сопутствуют следующие численные значения: параметр влияния $\sigma_0 = 8{,}92 - 8{,}98$ *ед.*, граничное значение кванта $r_0 = 4{,}98$ *ед.*, константа нормирования плотности $C_0 = 1$, число квантов $n_0 = 8$, вероятность попадания случайной величины в объём кванта $p_0 = 0{,}986$, длина ребра кванта $l_0 = 50{,}04$ *ед.*, максимальное значение вероятности квантования (покрытия объёма $X \times Y \times Z$ со стороной в 100 *ед.*) $P_0 = 0{,}893$.

Используя необходимые значения некоторых из приведенных параметров, определим средние величины продукта, попадающего в область каждого из восьми квантов, а также среднюю суммарную величину продукта в области квантования.

Введём обозначение величины среднего продукта для *ijk*-го кванта символом D_{ijk}. Индексы i, j, k могут принимать только значения 0 или 1. Например, величину D_{101} нужно определять из следующего выражения:

$$D_{101} = \int_{2m-r_0}^{4m-3r_0} f_Z(z) \int_{r_0}^{2m-r_0} f_Y(y) \int_{2m-r_0}^{4m-3r_0} W(x,y,z) f_X(x)\,dxdydz. \quad (8)$$

В данном выражении все плотности вероятности одинаковы и равны

$$f(x) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Вычисляя все D_{ijk}, получаем следующие численные значения среднего продукта:

$$D_{000} = 2{,}746 \times 10^4;\ D_{001} = 136{,}764;\ D_{010} = 3{,}395 \times 10^{-3};$$
$$D_{011} = 0{,}681;\ D_{100} = 136{,}764;\ D_{101} = 0{,}684;$$
$$D_{110} = 0{,}681;\ D_{111} = 3{,}395 \times 10^{-3}.$$

Суммарное значение среднего продукта определяется как

$$D = \sum_{i,j,k=0}^{1,1,1} D_{ijk},$$

и оно будет равно $2{,}7735 \times 10^4$. Для проверки этого значения вычислим D по формуле:

$$D = \int_{r_0}^{4m-3r_0} f_Z(z) \int_{r_0}^{4m-3r_0} f_Y(y) \int_{r_0}^{4m-3r_0} W(x,y,z) f_X(x)\,dxdydz = 2{,}774 \times 10^4. \quad (9)$$

Как видно из выражения (9), погрешность составляет менее 0,1%.

Заключение

Поставлена задача реализации оптимального вероятностного квантования в смысле заполнения в трёхмерном пространстве. Важными факторами, определяющими существование данного решения, являются использование граничной гарантированной вероятности и параметра влияния. Приведён пример решения задачи квантования.

Получено выражение для показателя целевой функции квантования – вероятности покрытия квантуемого объёма в пространстве. Приведён пример оценивания среднего количества продукта, размещённого в заданном объёме квантования, как отдельными квантами, так и полным квантованным объёмом.

Рассмотренные вопросы квантования в трёхмерном пространстве могут найти различные практические приложения.

Литература

1. Гришанин, Б. А. Учёт ценности информации в теории ценности информации / Б.А. Гришанин // Изв. АН. СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 2.

2. Андронов, А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации / А.М. Андронов, Т.Н. Бокоев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.

3. Смагин, В. А. Оптимальное квантование информации / В.А. Смагин // Изв. Вузов. Приборостроение. – 2002. – № 5. – С. 10–14.

4. Смагин, В. А. Модели оптимального в смысле заполнения квантования синтаксической и семантической информации / В.А. Смагин, Р.О. Лавров // Труды ВКА им. А. Ф. Можайского. – 2012. – № 636. – С. 63–70.