Выбор и обоснование приближенных моделей плотностей распределения вероятностей значений различных по классу частных показателей качества информационных систем

Selection and validation of approximate distribution models for probability densities of particular quality indicators of different classes for information systems

Паращук / Paraschuk I.
Игорь Борисович
(shchuk@rambler.ru)
доктор технических наук, профессор,
заслуженный изобретатель РФ.
ФГКВОУ ВПО «Военная академия связи
имени Маршала Советского Союза С. М. Буденного»
(ВАС им. С. М. Буденного),
профессор кафедры автоматизированных систем
специального назначения.
г. Санкт-Петербург

Аверьянов / Averjanov E.
Евгений Геннадьевич
(averly@yandex.ru)
кандидат технических наук, доцент.
ВАС им. С. М. Буденного,
заместитель начальника кафедры
автоматизированных систем
специального назначения.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: информационная система – information system; приближенная модель – approximate model; плотность распределения – distribution density; функция распределения – distribution function; вероятность – probability; показатель качества – quality indicator.

В статье предложен подход, позволяющий формировать приближенные модели плотностей (функций) распределения вероятностей значений частных показателей качества информационных систем с использованием процедур аппроксимации разнородных реальных плотностей их известными упрощенными аналогами, что позволяет существенно снизить вычислительную сложность решения задачи оценивания качества систем такого класса.

The article outlines an approach to the construction of approximate models of probability density (function) distributions of particular quality indicators for information systems which uses various procedures of approximation of real heterogeneous probability densities by their known simplified analogues. This results in a substantial reduction of the computation complexity of the problem of assessing the quality of such systems.

В ряде случаев при моделировании, при анализе вероятностно-временных характеристик современных информационных систем (ИС) возникают трудности при описании вероятностной меры частных показателей качества ИС с использованием плотностей (функций) распределения вероятностей их значений.

Рассмотрим подход, позволяющий формировать приближенные модели плотностей (функций) распределения вероятностей значений частных показателей качества ИС с использованием процедур аппроксимации разнородных реальных плотностей их известными упрощенными аналогами.

Так, в работах [1–4] на основе работы [5], рассматривающей приближенную модель, структурно тождественную анализируемой системе, получены требуемые модели распределения времени доставки сообщения с учетом допущений относительно процессов массового обслуживания на каналах любого маршрута доставки сообщения в ИС. Суть этих допущений сводится к следующему: 1) дисциплина обслуживания в сети – «первым пришел – первым обслужен» (FIFO), что позволяет не учитывать статистическую зависимость случайной величины времени ожидания в очереди отдельного канала от длины сообщений, а также от случайных величин времен ожидания в очередях других каналов на этом же маршруте доставки сообщения; 2) случайные величины времен ожидания в очередях отдельных каналов маршрута независимы; 3) случайные величины суммарного времени ожидания во всех очередях на маршруте и суммарного времени передачи по всем каналам маршрута взаимно независимы; 4) на любой канал ИС поступает пуассоновский поток сообщений, в котором длительность интервалов между моментами поступления сообщений статистически не зависит ни от случайной величины длины сообщения, ни от текущего случайного состояния канала или его очереди, причем эта длина не изменяется в процессе доставки сообщения.

В работе [1] обоснована справедливость допущений 2–4, основанная на том, что в асимптоте по числу лучей

поток сообщений, поступающий на любой исходящий канал в центре «звезды» ИС, является пуассоновским без корреляции между интервалами поступления сообщений и их длиной, а случайные величины времен ожидания в очередях каналов, входящих в центр «звезды» и исходящих из него, взаимно независимы.

Большая математическая сложность и трудоемкость вычисления точных числовых характеристик временных случайных величин [5], а также приближенный характер модели сделали целесообразным подход, развитый в работах [1–4]. Авторы этих работ жертвуют точностью анализа модели и аппроксимируют реальные плотности распределения вероятностей (ПРВ) значений временных показателей качества (ПК) ИС относительно просто вычисляемыми функциями распределения, условными по значениям соответствующих ПК и определяемыми для некоторых фиксированных значений этих ПК. Достаточно корректные результаты дает аппроксимация реальных ПРВ временных характеристик процессов информационного обмена и управления гамма-распределением [5–7].

Например, ПРВ значений времени доставки сообщений в ИС радиальной структуры можно записать в виде [6, 8, 9]:

$$\omega(t_{дс}(k)/\vec{Y}_{QoS}(k);\vec{Y}_{ф}(k);\vec{Y}_{у}(k);\vec{Y}_{см}(k)) = \\ = \begin{cases} \dfrac{\gamma^{К}}{\Gamma(К)} t_{дс}^{К-1}(k)\cdot e^{-\gamma t_{дс}(k)}, & при\ t_{дс}(k)>0; \\ 0, & при\ t_{дс}(k)=0 \end{cases}, \quad (1)$$

где К= $\alpha+1$; $\gamma=1/\beta$ – параметры гамма-распределения, связанные с числовыми характеристиками времени доставки сообщения на k-ом шаге функционирования ИС соотношениями [1, 6, 8]:

$$M[t_{дс}^{o}(k)] = \frac{К}{\gamma};\ D[t_{дс}^{o}(k)] = \frac{К}{\gamma^2}, \quad (2)$$

/ – символ условности рассматриваемого ПК относительно значений остальных ПК ИС; (^{o}) – символ нормальных условий функционирования.

Для доказательства справедливости аппроксимации реальной ПРВ ПК время доставки сообщения – $t_{дс}(k)$ гамма-распределением находим совместную ПРВ суммы двух независимых случайных величин (времени ожидания и времени передачи), входящих в $t_{дс}(k)$ на основании соотношения для выборочных значений этого ПК [1]: $t_{дс}(k) = t_{ож}(k) + t_{пер}(k)$.

Анализ работ [1, 5, 10] позволяет сделать вывод о том, что распределение вероятностей значений времени ожидания начала передачи сообщения в системах массового обслуживания (СМО) с ожиданием (дисциплина обслуживания – в порядке поступления) достаточно корректно может описываться ПРВ в виде гамма-распределения [8]:

$$\omega(t_{ож}) = \begin{cases} \dfrac{\gamma^{К}}{\Gamma(К)} t_{ож}^{К-1}\cdot e^{-\gamma t_{ож}}, & при\ t_{ож}>0; \\ 0, & при\ t_{ож}=0 \end{cases}, \quad (3)$$

В то же время для ИС, обеспечивающих, например, телефонный обмен с использованием методов пакетной передачи сообщений и другие виды услуг (связи), а также для каналов управления и сигнализации ИС распределение вероятностей значений времени передачи сообщения может быть описано ПРВ экспоненциального вида [8]:

$$\omega(t_{пер}) = \lambda\cdot e^{-\lambda t_{пер}}, \quad при\ 0<t_{пер}<\infty. \quad (4)$$

Существует много методов аппроксимации получаемой совместной плотности известными ПРВ. Основным среди непараметрических методов восстановления ПРВ является метод гистограмм [11].

К параметрическим методам нахождения ПРВ суммы двух независимых случайных величин (в нашем случае ими являются выборочные значения $t_{ож}$ и $t_{пер}$) относятся методы, рассматриваемые в [12, 13]. В аналитическом виде совместная ПРВ суммы, в общем случае, равна:

$$\Phi_{x_1+x_2}(x) = \Phi_1(x)\cdot\Phi_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(x-x_1)\cdot \\ \cdot d\Phi_1(x_1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(x-x_2)\cdot d\Phi_2(x_2). \quad (5)$$

Для анализа ПРВ суммы двух независимых случайных величин с помощью характеристических функций справедливо выражение [12, 13]:

$$\chi_{x_1+x_2}(q) = \chi_1(q)\cdot\chi_2(q). \quad (6)$$

В нашем случае

$$\chi_{t_{ож}+t_{пер}} = (1-j\theta\beta)^{-(\alpha+1)}\cdot\frac{\lambda}{\lambda-j\theta} = \frac{(1-j\theta\beta)^{-(\alpha+1)}}{1-j\theta\dfrac{1}{\lambda}},\ при\ \theta<\frac{1}{\beta}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что при условии $\beta\approx 1/\lambda$ полученное выражение является характеристической функцией гамма-распределения со смещенным на единицу степенным коэффициентом, т.е. характеристическая функция $\approx(1-j\theta\beta)^{-(\alpha+1+1)}$.

Диапазон изменения параметров $t_{ож}$ и $t_{пер}$ не позволяет говорить о жестком закреплении для их описания ПРВ гамма-распределения либо экспоненциального распределения соответственно, поскольку характер функционирования ИС, влияя на $t_{ож}$ и $t_{пер}$, заставляет применять для их аналитического описания более широкий диапазон ПРВ. Как ПРВ $t_{ож}$, так и ПРВ $t_{пер}$ могут подчиняться как экспоненциальному закону, так и гамма-распределению. Далее найдем совместную ПРВ $t_{дс}$ для различных коэффициентов плотностей распределения вероятностей $t_{ож}$ и $t_{пер}$.

Как показано в [12], характеристическая функция суммы величин, имеющих одинаковые распределения, имеет вид: $\chi_{x_1+\ldots+x_n}(q)=\chi^n(q)$.

Результаты расчетов характеристических функций для ПРВ суммы двух независимых случайных величин (каковыми являются выборочные значения времени ожидания передачи и времени передачи сообщения в ИС – $t_{ож}$ и $t_{пер}$) сведены в таблицу 1.

Расчеты проведены для ПРВ с коэффициентами $\Gamma(\alpha_1,\beta_1)$, $\Gamma(\alpha_2,\beta_2)$ при $\beta_1=\beta_2$ и при $\beta_1\neq\beta_2$; и невыполнении условия $\beta\approx 1/\lambda$. Если условие $\beta\approx 1/\lambda$ не выполняется, то получим выражение

$$\chi_{x_1+x_2}=\frac{(1-j\theta\beta)^{-(\alpha+1)}}{1-j\theta\dfrac{1}{\lambda}}=\frac{(\sqrt{(1+\theta^2\beta^2)})^{-(\alpha+1)}}{\sqrt{1-\theta^2\dfrac{1}{\lambda^2}}}\cdot\frac{e^{j(arctg\,\theta\beta)(\alpha+1)}}{e^{-j(arctg\,\theta/\lambda)}}. \quad (8)$$

Выражение (8), в конечном итоге, с использованием известного обратного преобразования Фурье характеристической функции [12]

$$\omega(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\theta)\cdot e^{-j\theta x}d\theta \quad (9)$$

может быть аппроксимировано гамма-распределением $\Gamma(x, y)$, с коэффициентами:

$$x\approx\frac{(\alpha+1)\beta^2+1/\lambda^2}{\beta(\alpha+1)+1/\lambda};\qquad y\approx\frac{(\beta(\alpha+1)+1/\lambda)^2}{(\alpha+1)\beta^2+1/\lambda^2}-1. \quad (10)$$

Таким образом, с использованием аппарата характеристических функций математически строго доказана допустимость описания ПРВ суммы двух величин $t_{ож}$ и $t_{пер}$ (в общем случае) гамма-распределением.

Методика вычисления параметров функции гамма-распределения α и β, при дискретном распределении длины сообщений, приведена в работе [5], согласно которой

$$\alpha=\frac{(M[t^{o}_{дс}(k)])^2}{D[t^{o}_{дс}(k)]};\qquad \beta=\frac{M[t^{o}_{дс}(k)]}{D[t^{o}_{дс}(k)]}. \quad (11)$$

Среднее значение и дисперсия времени доставки сообщения на k-ом шаге функционирования ИС радиальной структуры определяется на основе выражений [1, 9]:

$$M[t^{o}_{дс}(k)]=\frac{1}{\Lambda(k)}\sum_{jj'=1}^{J}\lambda_{jj'}(k)\cdot M[t^{o}_{дс\,jj'}(k)]; \quad (12)$$

$$D[t^{o}_{дс}(k)]=\sum_{jj'=1}^{J}\left(\frac{\lambda_{jj'}(k)}{\Lambda(k)}\right)\cdot D[t^{o}_{дс\,jj'}(k)], \quad (13)$$

где $M[t^{o}_{дс\,jj'}(k)]$, $D[t^{o}_{дс\,jj'}(k)]$ – среднее время и дисперсия времени доставки сообщения в jj'-ом информационном направлении на k-ом шаге функционирования ИС; $\lambda_{jj'}(k)$, $\Lambda(k)$ – интенсивность потока сообщений на k-ом шаге функционирования в jj'-ом информационном направлении и ИС в целом.

Для общего случая представления ИС системой массового обслуживания с ожиданием, на которую на

Таблица 1

№ п/п	Вид законов распределения суммируемых величин	Значения α_1 и α_2	Коэффициенты полученных гамма-распределений	Вид характеристической функции
1.	Экспоненциальное расп. + гамма-распределение	$\alpha_1=0$ $\alpha_2\neq 0$	$\Gamma(\alpha_2+1,\beta)$	$(1-j\,\theta\beta)^{-(\alpha_2+1)}$
2.	Гамма-распределение + гамма-распределение	$\alpha_1\neq 0$ $\alpha_2\neq 0$	$\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1,\beta)$	$(1-j\,\theta\beta)^{-(\alpha_1+\alpha_2+1)}$
3.	Экспоненциальное расп. + экспоненциальное расп.	$\alpha_1=0$ $\alpha_2=0$	$\Gamma(1,\beta)$	$(1-j\,\theta\beta)^{-2}$

k-ом шаге функционирования поступает пуассоновский поток сообщений интенсивностью $\lambda_{jj'}(k)$, числовые характеристики $t_{\text{дс}\,jj'}(k)$ можно представить в виде [5, 6]:

$$\mathrm{M}[t^{\text{о}}_{\text{дс}\,jj'}(k)] = \mathrm{M}[t^{\text{о}}_{\text{ож}\,jj'}(k)] + \mathrm{M}[t^{\text{о}}_{\text{пер}\,jj'}(k)]; \quad (14)$$

$$\mathrm{D}[t^{\text{о}}_{\text{дс}\,jj'}(k)] = \mathrm{D}[t^{\text{о}}_{\text{ож}\,jj'}(k)] + \mathrm{D}[t^{\text{о}}_{\text{пер}\,jj'}(k)], \quad (15)$$

где $\mathrm{M}[t^{\text{о}}_{\text{ож}\,jj'}(k)]$, $\mathrm{D}[t^{\text{о}}_{\text{ож}\,jj'}(k)]$ – среднее значение и дисперсия времени ожидания сообщением начала передачи в jj'-ом информационном направлении на k-ом шаге при нормальных условиях функционирования ИС; $\mathrm{M}[t^{\text{о}}_{\text{пер}\,jj'}(k)]$,$\mathrm{D}[t^{\text{о}}_{\text{пер}\,jj'}(k)]$ – среднее значение и дисперсия времени передачи сообщения на k-ом шаге функционирования ИС при экспоненциальном распределении его длины [1].

Анализ работы [14] позволяет говорить о том, что показатели энергетической доступности к информационным сообщениям, средствам информационного обмена и управления на k-ом шаге функционирования ИС ($\mathrm{h}^2_{\text{вх прм рп}}(k)$; $\mathrm{h}^2_{\text{вх прм рр}}(k)$), а также показатели энергетической достаточности в jj'-х информационных направлениях ($\mathrm{h}^2_{\text{вх прм рр}}(k)$), например, спутниковой компоненты ИС могут быть описаны с использованием логарифмически нормальной модели ПРВ значений этих ПК [1]:

$$\psi(\mathrm{h}^2(k)) = \frac{\lg \mathrm{e}}{\mathrm{h}^2(k)\sigma_{\mathrm{h}^2(k)}\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{\frac{[\lg \mathrm{h}^2(k) - \mathrm{M}[\lg \mathrm{h}^2(k)]]^2}{2\mathrm{D}[\lg \mathrm{h}^2(k)]}\right\}. \quad (16)$$

Для числа требований на входе ретранслятора спутниковой компоненты ИС при большом числе пользователей со сравнительно малой интенсивностью сообщений обычно используется пуассоновская модель функции распределения [1]:

$$F(n_{\text{т}}(k)) = \sum_{n=1}^{n_{\text{т}}} \frac{\Lambda_{\text{т}}(k)\, t_{\text{пер с}}(k)}{n(k)!} \exp\left(-\Lambda_{\text{т}}(k) t_{\text{пер с}}(k)\right), \quad (17)$$

где интенсивность поступления требований (сообщений) на k-ом шаге функционирования ИС и число требований на входе ретранслятора спутниковой компоненты ИС обозначены

$$\Lambda_{\text{т}}(k) = \sum_{jj'=1}^{n_{\text{т}}} \lambda_{jj'}(k)$$

и $n(k) = \overline{1, n_{\text{т}}}$ соответственно.

На случай использования в ИС информационных каналов малой емкости, а также при малых нагрузках, возможно использование для получения более точных результатов в области малых значений нагрузки (для аппроксимации реальной ПРВ значений ПК этого класса) усеченного нормального распределения, позволяющего скорректировать пределы интегрирования и тем самым (вводя точку усечения) исключить отрицательные значения аргумента [13].

Плотности распределения вероятностей значений точностных показателей, типа отклонения ПК информационного обмена (связи) на k-ом шаге функционирования ИС, обусловленные погрешностями в контуре управления $\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)$, целесообразно аппроксимировать многомерной нормальной (гауссовской) ПРВ, которую в соответствии с теоремой о нормализации ПРВ ошибок управления в системе управления с замкнутой обратной связью можно записать в виде [1, 6]:

$$\omega(\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)/\vec{Y}'_{\text{у}}(k); \vec{Y}_{\text{QoS}}(k); \vec{Y}_{\text{ф}}(k); \vec{Y}_{\text{см}}(k)) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \mathrm{D}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)])^{1/2}} \times \\ \times \exp[-1/2(\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k) - \mathrm{M}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)]^{\text{т}}\, \mathrm{D}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)] \cdot \\ \cdot (\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k) - \mathrm{M}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)])], \quad (18)$$

где $\mathrm{M}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)]$ и $\mathrm{D}[\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)]$ – среднее значение вектора ошибок управления и матрица дисперсий ошибок управления на k-ом шаге функционирования ИС; N – число компонент вектора ошибок управления $\Delta\vec{Y}^{\text{у}}_{\text{св}}(k)$.

Исходя из того, что текущее и прогностическое оценивание качества ИС традиционно осуществляется для случая детерминированного разбиения ресурса между процессами информационного обслуживания пользователей, функционирования, управления и мониторинга для детерминированных ПК в рамках общего вероятностного подхода к оцениванию затрат ресурса ИС целесообразно ввести модель ПРВ в виде дельта-функции [1, 6], которая для k-ого шага функционирования ИС будет иметь вид:

$$\omega(\text{З}_{\text{св}\,i}(k)/\vec{Y}'_{\text{ф}}(k); \vec{Y}_{\text{QoS}}(k); \vec{Y}_{\text{у}}(k); \vec{Y}_{\text{см}}(k)) = \delta(\text{З}_{\text{св}\,i}(k) - \text{З}^{\text{тр}}_{\text{св}\,i}), \quad (19)$$

где $\text{З}_{\text{св}\,i}(k)$, $\text{З}^{\text{тр}}_{\text{св}\,i}$ – затраты i-го вида ресурса на осуществление информационного обмена (связи) на k-ом шаге функционирования ИС и требования к ним.

Предложенный подход по выбору и обоснованию приближенных моделей плотностей (функций) распределения вероятностей значений частных ПК (ЧПК) ИС различного класса является, на наш взгляд, математически корректным и практически применимым.

Вместе с тем, необходимо признать, что рассмотренный подход к описанию, моделированию и оцениванию качества ИС имеет ряд недостатков, вызывающих справедливую критику. Основными из них являются:

– аппроксимация известными аналитическими ПРВ реальных плотностей распределения вероятностей значений параметров и ПК носит приближенный характер, что, в конечном итоге, влияет на точность моделирования и оценивания качества ИС;

– возникает необходимость дополнительного оценивания параметров ПРВ, что влечет за собой повышение вычислительной сложности решения задачи моделирования и оценивания качества ИС;

– не может идти речь об унификации моделей различных параметров (а следовательно и алгоритмов оценивания соответствующих им ЧПК), поскольку множество параметров (либо ПК) подразумевает и большое количество разнородных аналитических ПРВ, аппроксимирующих реальные ПРВ значений этих параметров.

В этих условиях целесообразным видится подход, основанный на моделировании и оценивании не абсолютных значений параметров (ПК), но их отклонений от требуемых значений в процессе функционирования сети.

Справедливость такого подхода обоснована в работах [15, 16]. В этих работах обусловлена применимость для анализа качества сложных управляемых информационных систем критерия вероятности $P(A)$ некоторого события A, причем в качестве события A берется попадание значения отклонения (ошибки) параметра (показателя качества системы) в заданные допуски.

Например, если известно, что отклонение среднего времени доступности к услугам ИС $\Delta\bar{t}_{\text{дост}}^{усл}(k)$ от требуемого значения не должно составлять x секунд (т.е. должно находиться в допусках $(-x,+x)$), то достаточно объективным критерием оценивания состояния (качества) и критерием сравнения управляемых систем такого класса является вероятность события, состоящего в том, что выполняется неравенство $-x \le \Delta\bar{t}_{\text{дост}}^{усл}(k) \le +x$ [16].

Этот критерий хорошо отражает назначение (задачу) системы, от которой требуется высокая точность и достоверность работы. Перечисленные положения имеют широкое применение в рамках теории допусков, где под допуском принято понимать заранее установленные пределы, в которых должны находиться значения параметров системы или определенного ПК, с помощью которого оценивается состояние (качество) управляемой системы [15].

Таким образом, описан подход, позволяющий выбрать и обосновать приближенные модели плотностей (функций) распределения вероятностей значений частных показателей качества информационных систем с использованием процедур аппроксимации разнородных реальных плотностей их широко известными упрощенными аналогами. Это несколько снижает точность описания процессов в ИС, но позволяет существенно снизить вычислительную сложность решения задач моделирования и оценивания качества информационных систем.

Литература

1. Терентьев, В. М. Анализ эффективности функционирования автоматизированных сетей многоканальной радиосвязи / В.М. Терентьев, Ю.В. Санин. – СПб.: ВАС, 1992. – 80 с.

2. Путилин, А. Н. Моделирование процесса обслуживания заявок в системах множественного доступа / А.Н. Путилин, Е.Г. Белобров, И.Б. Паращук // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1998. – № 3. – С. 63–70.

3. Паращук, И. Б. Моделирование процесса отклонений показателей качества сети многоканальной радиосвязи от требуемых значений / И.Б. Паращук // Радиотехника. – 1998. – № 11. – С. 6–9.

4. Терентьев, В. М. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи / В.М. Терентьев, И.Б. Паращук. – СПб.: ВАС, 1995. – 195 с.

5. Гинсбург, С. Л. Приближенное вычисление функции распределения времени доставки в сетях связи с коммутацией сообщений / С.Л. Гинсбург, А.Я. Толчан // Модели информационных сетей и коммутационных систем. – М.: Наука, 1982. – С. 45–60.

6. Терентьев, В. М. Автоматизированные системы управления сетями многоканальной радиосвязи / В.М. Терентьев. – Л.: ВАС, 1986. – 116 с.

7. Клейнрок, Л. Коммуникационные сети / Л. Клейнрок. – М.: Наука, 1970. – 285с.

8. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь,1982. – 624 с.

9. Терентьев, В. М. Методика обоснования требований к показателям качества автоматизированных сетей многоканальной радиосвязи / В.М. Терентьев. – Л.: ВАС, 1990. – 78с.

10. Школьный, Е. И. Статистические свойства длительности ожидания сообщений в системе с относительным приоритетом / Е.И. Школьный, Е.О. Наумова // Модели и методы информационных сетей. – М.: Наука, 1990. – С. 61–67.

11. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1988. – 480 с.

12. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – кн. 1–3, изд. 2-е. – М.: Советское радио, 1974–1976. – 5552 с.

13. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

14. Спутниковая связь и вещание. Справочник / под ред. Л.Я. Кантора. – М.: Радио и связь, 1988. – 288 с.

15. Розенвассер, Е. Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 464 с.

16. Казаков, И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний / И.Е. Казаков. – М.: Наука, 1975. – 432 с.